Tradycyjne mierniki ryzyka

Przykład 1. Ryzyko w przypadku portfela inwestycyjnego

Dwie inwestycje mają następujące stopy zwrotu, zależne od sytuacji gospodarczej:

Sytuacja	Prawdopodobieństwo	R_X	R_Y
Recesja	0,2	9,0%	4,0%
Bez zmian	0,5	8,0%	8,0%
Wzrost	0,3	7,0%	12,0%

Polecenia:

1. Wyznaczyć wartości oczekiwane dla każdej inwestycji.
2. Wyznaczyć wariancje i odchylenia standardowe dla X i Y.
3. Wyznaczyć kowariancję i współczynnik korelacji pomiędzy X i Y.
4. Jaka powinna być struktura portfela inwestycyjnego, aby wariancja portfela była równa zeru. Wyznaczyć wartość oczekiwaną, wariancję i odchylenie standardowe dla portfela o wyznaczonej strukturze.
5. Przedstawić zależność wartości oczekiwanej od odchylenia standardowego dla portfela inwestycyjnego w zależności od struktury portfela.
   Wyznaczyć korzyści z dywersyfikacji w zależności od struktury portfela.

Rozwiązanie

Ad 1.

Wartość oczekiwana dla każdej z inwestycji wynosi: $\mu = \sum_{j=1}^{3} p_j r_j$

$E(r_X) =$ 0,20 * 9,0% + 0,50 * 8,0% + 0,30 * 7,0% = 7,9%.

$E(r_Y) =$ 0,20 * 4,0% + 0,50 * 8,0% + 0,30 * 12,0% = 8,4%.

Ad 2.

Wariancja (σ^2) dla każdej z inwestycji wynosi: $\sigma^2 = \sum_{j=1}^{3} \left[p_j \left(x_j - \mu \right)^2 \right]$

$\sigma^2_X =$ 0,2*(9,0%-7,9%)^2+ 0,5*(8,0%-7,9%)^2+ 0,3*(7,0%-7,9%)^2 = 0,000049

$\sigma^2_Y =$ 0,2*(4,0%-8,4%)^2+ 0,5*(8,0%-8,4%)^2+ 0,3*(12,0%-8,4%)^2 = 0,000784

Odchylenie standardowe jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$\sigma_X =$ 0,007000

$\sigma_Y =$ 0,028000

Ad 3.

Kowariancja pomiędzy stopami zwrotu dla inwestycji X i Y:

$$\sigma_{XY} = \sum p_i (r_X, r_Y) \times [r_{Xi} - E(r_X)][r_{Yi} - E(r_Y)]$$

$\sigma_{XY} =$ + 0,2*(9,0%-7,9%)(4,0%-8,4%) +
+ 0,5*(8,0%-7,9%)(8,0%-8,4%) +
+ 0,3*(7,0%-7,9%)(12,0%-8,4%) = -0,000196

Współczynnik korelacji jest wyznaczany przy wykorzystaniu kowariancji: $\varrho_{XY} = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \times \sigma_Y}$

$\rho_{XY} =$ -1

Współczynnik ten można także wyznaczyć przy wykorzystaniu funkcji CORREL (Excel).

Ad 4.

Jeśli współczynnik korelacji wynosi -1, a wariancja dla portfela ma być równa zeru, to udział inwestycji X w portfelu musi wynosić:

$$w_X = \frac{\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}}{1+\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}}$$

Zatem:

$w_X = 80\%$ $\qquad$ $w_Y = 20\%$

Wartość oczekiwana dla portfela jest równa: $E(r_P) = w_X E(r_X) + w_Y E(r_Y)$

$E(r_P) = 0{,}800 * 0{,}08 + 0{,}20 * 0{,}084 = 8{,}0\%$

Wariancja portfela złożonego z dwóch inwestycji:

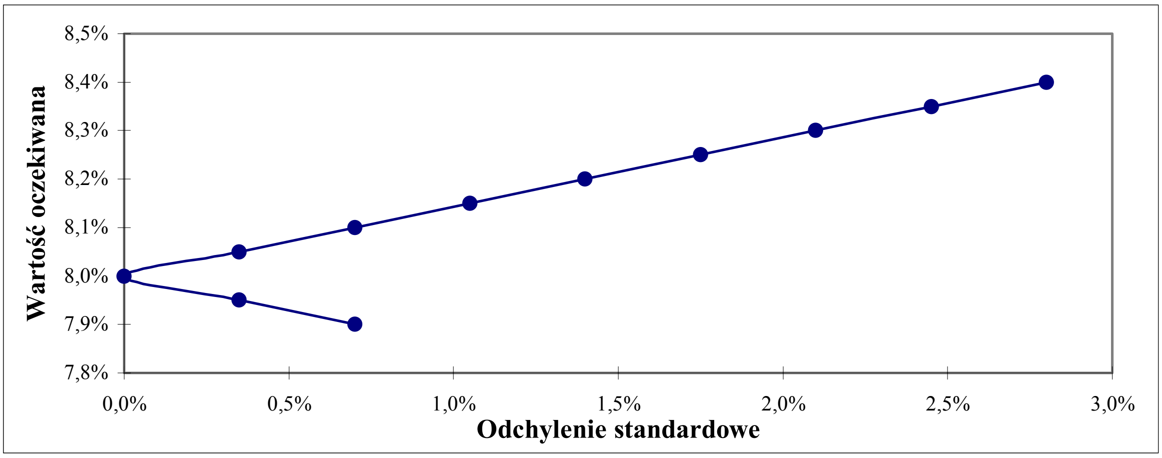
$\sigma_P^2 = w_X^2\sigma_X^2 + w_Y^2\sigma_Y^2 + 2w_X w_Y \varrho_{XY}\sigma_X\sigma_Y$ $\qquad$ $\sigma^2_P =$ 0,000000

Odchylenie standardowe dla portfela wynosi: $\sigma_P =$ 0,000000

Ad 5.

Wartość oczekiwana, odchylenie standardowe portfela oraz korzyści z dywersyfikacji:

w_X	σ_P	$E(r_P)$	σ_W	KD
0	2,80%	8,40%	2,8%	0,0%
0,1	2,45%	8,35%	2,6%	5,4%
0,2	2,10%	8,30%	2,4%	11,8%
0,3	1,75%	8,25%	2,2%	19,4%
0,4	1,40%	8,20%	2,0%	28,6%
0,5	1,05%	8,15%	1,8%	40,0%
0,6	0,70%	8,10%	1,5%	54,5%
0,7	0,35%	8,05%	1,3%	73,7%
0,8	0,00%	8,00%	1,1%	100,0%
0,9	0,35%	7,95%	0,9%	61,5%
1	0,70%	7,90%	0,7%	0,0%



Rys. 1. Stopa zwrotu a ryzyko portfela

Przykład 2. VaR dla jednego instrumentu

Wartość rynkowa portfela wynosi 100 mln zł.
Oczekiwana stopa zwrotu dla 1-dniowego horyzontu prognozy wynosi 0.
Odchylenie standardowe stopy zwrotu wynosi 1%.

Polecenia:

1. Podaj wzór na wartość portfela przy założeniu kapitalizacji ciągłej.
2. Ile wynosi prognozowana stopa zwrotu przy założeniu, że prawdopodobieństwo otrzymania niższej niż prognozowana stopy zwrotu wynosi 5%.
3. Wyznaczyć wartość portfela odpowiadającą prognozowanej stopie zwrotu.
4. Wyznaczyć potencjalną stratę (VAR).
5. Wyznaczyć potencjalną stratę (VAR) przy zastosowaniu zwykłej aproksymacji.

Rozwiązanie

Ad 1.

Aktualna rynkowa wartość portfela wynosi 100 mln zł.

Przyszła prognozowana wartość portfela V_1 wynosi: $V_1 = V_0 e^r$

Ad 2.

Przyjmujemy prawdopodobieństwo 5%, że stopa zwrotu r dla portfela będzie mniejsza niż stopa prognozowana

$$P(r < \hat{r}) = 5\%$$

$$P(r < -1{,}65\sigma_{1|0} + \mu_{1|0}) = 5\%$$

Wartość oczekiwana prognozowanej na 1 dzień stopy zwrotu jest równa zeru:

$$\mu_{1|0} = 0$$

Prognozowana na 1 dzień stopa zwrotu dla portfela wynosi zatem:

$$\hat{r} = -1{,}65\sigma_{1|0} \quad = \quad -1{,}645\%$$

Ad 3.

Wartość portfela zmniejszona o potencjalną stratę wynosi:

$$\hat{V}_1 = V_0 e^{\hat{r}} \quad = \quad 98{,}369 \quad \text{mln zł}$$

Ad 4.

Potencjalna strata wynosi:

$$VaR = V_0 - \hat{V}_1 = V_0\left(1 - e^{\hat{r}}\right) \quad = \quad 1{,}631 \quad \text{mln zł}$$

Ad 5.

Potencjalna strata przy zastosowaniu zwykłej aproksymacji wynosi:

$\alpha/2$	t	t σ	V_0	VaR = t σ V_0
5,00%	1,645	0,01645	100	1,645 mln zł

Przykład 3. VaR dla pozycji walutowej

Bank ma pozycję walutową długą 25 mln USD. Kurs wynosi 4,00 zł/USD.
Stopa zmiany kursu jest zmienną losową o warunkowym rozkładzie normalnym.
Parametry tego rozkładu: średnia = 0; odchylenie standardowe 1,0%.

Polecenia:

1. Podaj wartość pozycji w walucie krajowej.
2. Wyznaczyć potencjalną stratę (VAR) w ciągu najbliższego dnia dla poziomu istotności 5%, 2,5%, 0,5%.
3. Wyznaczyć potencjalną stratę (VAR), jeśli odchylenie standardowe stopy przychodu dla lokaty za granicą wynosi 0,5%, a współczynnik korelacji pomiędzy stopą przychodu dla lokaty za granicą a stopą zmian kursu waluty zagranicznej wynosi: -0,5.

Rozwiązanie

Ad 1.

Ekspozycja na ryzyko zmiany kursu walutowego jest równa wartości pozycji walutowej wyrażonej w walucie krajowej, a więc 100 mln zł.

Ad 2.

Aby ustalić ryzyko związane z daną ekspozycją należy określić ryzyko związane ze zmiennością kursu. Ryzyko walutowe jest mierzone odchyleniem standardowym stopy zmian kursu. Odchylenie standardowe informuje, o ile przeciętnie stopa zmian kursu walutowego odchyla się od wartości średniej równej 0.

Iloczyn zmiennej standaryzowanej t rozkładu normalnego i odchylenia standardowego mówi, do jakiego poziomu stopa zmiany kursu może obniżyć się przy założonym prawdopodobieństwie równym $\alpha/2$, że stopa ta znajdzie się w przedziale poniżej wyznaczonego poziomu.
Iloczyn ten jest nazywany oczekiwaną zmiennością (expected volatiliy).

VaR jest wyznaczana jako iloczyn: $\mathrm{VaR} \cong t_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{t|t-1} V_{t-1}$

gdzie:

V_{t-1} - wartość ekspozycji walucie krajowej (wartość ekspozycji w walucie obcej * kurs waluty obcej)

$\alpha/2$	$t_{\frac{\alpha}{2}}$	$\sigma_{t\|t-1}$	V_{t-1}	VaR	
5,00%	1,645	1,0%	100	1,645	mln zł.
2,50%	1,960	1,0%	100	1,960	mln zł.
0,50%	2,576	1,0%	100	2,576	mln zł.

Ad 3.

Zmiana wartości ekspozycji w walucie krajowej zależy od następujących czynników:

1. stopy zmiany kursu waluty obcej,
2. stopy przychodu inwestycji za granicą (lokaty, obligacji itp.)
3. korelacji pomiędzy tymi stopami.

Dane są:

1. odchylenie standardowe stopy zmian kursu waluty zagranicznej $\sigma_{r_d} = 1{,}0\%$
2. odchylenie standardowe stóp dla aktywów zagranicznych $\sigma_{r_z} = 0{,}5\%$
3. współczynnik korelacji $\varrho_{r_z r_d} = -0{,}5$

Wariancja stopy przychodu w walucie krajowej jest więc równa

$$\sigma^2_{r_H} = \sigma^2_{r_z} + \sigma^2_{r_d} + 2\varrho_{r_z r_d}\sigma_{r_z}\sigma_{r_d} = 0{,}008\%$$

Odchylenie standardowe wynosi $\sigma_{r_H} = 0{,}866\%$

VaR wyznaczamy na podstawie znanego wzoru: $\mathrm{VaR} \cong t_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{r_H} V_{t-1}$

$\alpha/2$	$t_{\frac{\alpha}{2}}$	σ_{rH}	V_{t-1}	VaR	
5,00%	1,645	0,866%	100	1,424	mln zł.
2,50%	1,960	0,866%	100	1,697	mln zł.
0,50%	2,576	0,866%	100	2,231	mln zł.

VaR możemy wyznaczyć także na podstawie wzoru: $\mathrm{VaR} \cong \sqrt{\hat{V}R\hat{V}^T}\, V_{t-1}$

W naszym przykładzie dla zmiennej t=1,645 mamy:

$$\hat{V} = \begin{vmatrix} 0{,}01644853 & 0{,}00822427 \end{vmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\hat{V}^T = \begin{vmatrix} 0{,}01644853 \\ 0{,}00822427 \end{vmatrix}$$

więc $\sqrt{\hat{V}R\hat{V}^T} = 1{,}424\%$ VaR = 1,424 mln zł.