Tradycyjne mierniki ryzyka

1.1 Wariancja i odchylenie standardowe

Portfel złożony z dwóch pozycji

Załóżmy, że portfel inwestycyjny składa się z dwóch instrumentów finansowych np. papierów wartościowych A oraz B. Mogą to być dowolne różne inwestycje.

Wartość oczekiwana stopy zwrotu dla portfela złożonego z dwóch pozycji jest następująca:

(1) $$E(r_P) = w_A E(r_A) + w_B E(r_B)$$

gdzie:
r_j - stopa przychodu (zwrotu) dla instrumentu j,
w_j - udział kapitału zainwestowanego w zakup papieru wartościowego j w portfelu ($w_A + w_B = 1$).

Wariancję stopy zwrotu dla portfela złożonego z **dwóch pozycji** wyznaczamy na podstawie wzoru:

(2) $$\sigma_P^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \varrho_{AB}\sigma_A\sigma_B$$

gdzie:
ρ_{AB} - współczynnik korelacji pomiędzy stopami zwrotu dla dwóch papierów wartościowych.

Portfel złożony z wielu pozycji

Wartość oczekiwana stopy zwrotu dla portfela złożonego z n inwestycji wynosi:

(3) $$E(r_p) = \sum_{j=1}^{n} w_j r_j$$

gdzie:
r_j - stopa przychodu (zwrotu) dla instrumentu j,
w_j - udział kapitału zainwestowanego w pozycję j w portfelu.

Macierz wariancji dla portfela inwestycyjnego złożonego z n pozycji ma postać:

(4) $$\sigma_P^2 = w^T V w = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

gdzie:
w_j - udział kapitału zainwestowanego w pozycję j w portfelu,
w - wektor tych udziałów (ze znakiem transpozycji T - poziomy),
σ_i^2 - wariancja stóp zwrotu dla inwestycji i.
σ_{ij} - kowariancja pomiędzy stopami zwrotu dla inwestycji i oraz j,
V - macierz wariancji i kowariancji.

Wariancja portfela może być również zapisana w sposób następujący:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \quad (5)$$

Wykorzystując definicję współczynnika korelacji, wariancję dla portfela inwestycyjnego możemy zapisać również w sposób następujący:

$$\sigma_P^2 = u^T R u = \begin{bmatrix} w_1\sigma_1 & w_2\sigma_2 & \ldots & w_n\sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \varrho_{12} & \cdots & \varrho_{1n} \\ \varrho_{21} & 1 & \cdots & \varrho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varrho_{n1} & \varrho_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1\sigma_1 \\ w_2\sigma_2 \\ \vdots \\ w_n\sigma_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

gdzie:
w_j - udział kapitału zainwestowanego w pozycję j w portfelu,
σ_j - odchylenie standardowe stóp zwrotu dla inwestycji j.
u - wektor iloczynów w_j σ_j (ze znakiem transpozycji T - poziomy),
ρ_{ij} - współczynnik korelacji pomiędzy stopami zwrotu dla inwestycji i oraz j,
R - macierz współczynników korelacji.

Wariancja portfela może być zatem zapisana w sposób następujący:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} w_i w_j \varrho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (7)$$

1.2 Nowoczesne mierniki ryzyka

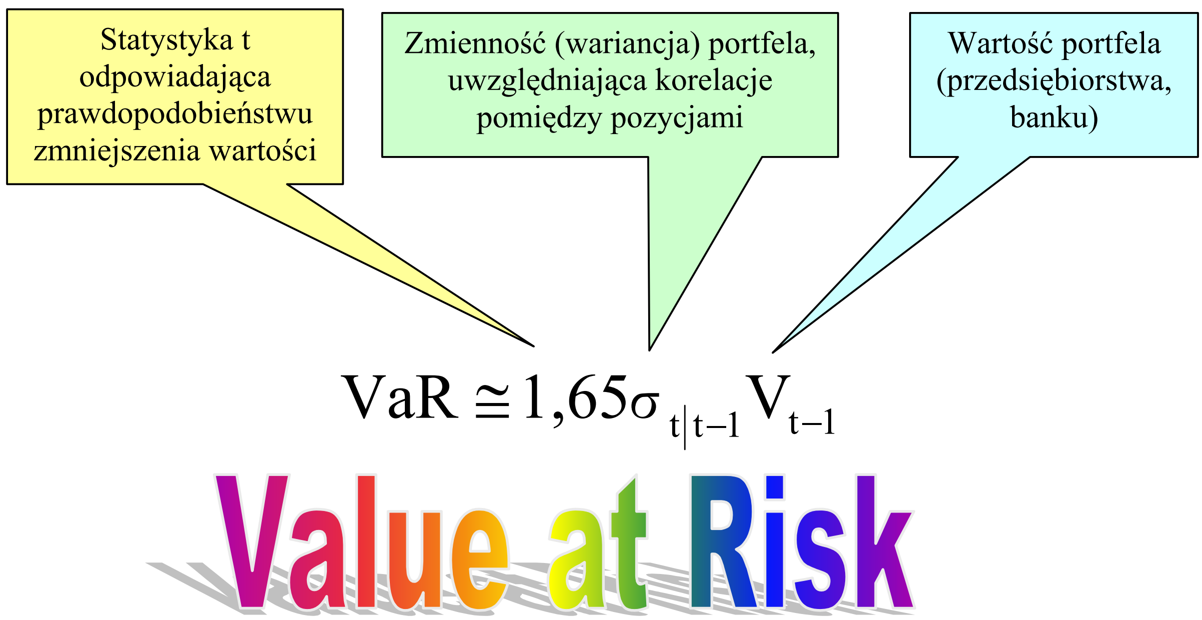
1.2.1 VaR

VaR (ang. **Value at Risk**) została przyjęta jako podstawowa i syntetyczna miara ryzyka w systemach RiskMetrics™ oraz CreditMetrics™ (J.P. Morgan). W kwietniu 1999 roku pojawił się system CorporateMetrics™ z podstawowymi miernikami ryzyka: Earnings at Risk (EaR), Earnings-per-Share-at-Risk (EPSaR) oraz Cash-Flow at Risk (CFaR), będącymi odpowiednikami VaR. Dokument został przygotowany przez RiskMetrics Group (RMG). Termin VaR jest tłumaczony jako wartość zagrożona. VaR jest potencjalnym maksymalnym zmniejszeniem wartości np. portfela inwestycyjnego z określonym prawdopodobieństwem w określonym horyzoncie.

Value at Risk jest potencjalną maksymalną stratą (zmniejszeniem wartości), możliwą do wystąpienia z określonym **prawdopodobieństwem** (np. 5%), zależną od **zmienności** cen, kursów, stóp procentowych, itd. oraz zależną od aktualnej **wartości rynkowej** pozycji, wartości portfela bądź wartości przedsiębiorstwa czy też banku. Im niższe jest założone prawdopodobieństwo, nazywane poziomem tolerancji, tym większa jest VaR. Im dłuższy jest horyzont, tym większa jest oczekiwana zmienność oraz większy jest poziom VaR. Oczekiwana zmienność zależy od horyzontu ryzyka. Zależność ta nie jest wprost proporcjonalna.

VaR wyraża potencjalne maksymalne **zmniejszenie wartości** portfela inwestycyjnego w założonym horyzoncie (jednego dnia, dwóch tygodni, miesiąca). Zmniejszenie wartości o więcej niż wyznaczony poziom VaR wystąpi z określonym małym prawdopodobieństwem (najczęściej przyjmuje się 5%). Prawdopodobieństwo, że stopa zwrotu będzie niższa (wartość portfela zmniejszy się bardziej niż VaR) wynosi 5%. Prawdopodobieństwo, że inwestor **nie** straci więcej niż VaR wynosi 95%.

Iloczyn wartości standaryzowanej zmiennej t oraz odchylenia standardowego (1,65σ) jest nazywany **statystyką VaR**. Jest to odpowiedni (np. piąty) percentyl rozkładu stopy zwrotu.



Rys. 1. Czynniki VaR
Źródło: Opracowanie własne.

W przypadku portfela inwestycyjnego złożonego z co najmniej dwóch pozycji można wykorzystać następujący bardzo wygodny zapis macierzowo - wektorowy:

(8) $VaR \cong \sqrt{\hat{V} R \hat{V}^T}\, V_{t-1}$

gdzie:

$\hat{V}$ - wektor udziałów danego instrumentu w portfelu inwestycyjnym pomnożonych przez statystykę VaR,

R - symetryczna macierz współczynników korelacji pomiędzy stopami zwrotu dla inwestycji w portfelu.

Zapis ten jest równoważny następującemu prostemu zapisowi wykorzystującemu odchylenie standardowe dla portfela inwestycji:

(9) $VaR \cong 1{,}65\sigma_P V_{t-1}$

gdzie:

σ_P - odchylenie standardowe dla portfela inwestycji.