Ekspozycja na zmiany stóp procentowych. Metody stochastyczne

1. Metody wyceny: tradycyjne, bezarbitrażowe, dwumianowe, symulacja
2. Stopy spot jako stopy dyskontowe. Wykorzystanie stóp forward do wyceny instrumentów o zmiennym oprocentowaniu. Stopy forward zero
3. Metody stochastyczne

1.1 Ekspozycja

- Wartość księgowa
- Wartość księgowa + commitments
- Wartość rynkowa
- Wartość ekonomiczna (na podstawie modelu)

W badaniu ekspozycji wartości na zmiany stóp procentowych mogą być wykorzystane dwa podstawowe podejścia: tradycyjne i wykluczające arbitraż (ang. *arbitrage free valuation approach*). W pierwszym przypadku wartość jest sumą strumieni pieniężnych aktualizowanych według stóp zwrotu (np. YTM w przypadku obligacji). W drugim przypadku wartość jest sumą strumieni pieniężnych aktualizowanych według stóp spot[1]. Bez względu na podejście otrzymujemy tę samą wartość wyceny.

W przypadku wbudowanych opcji (np. kredyty bądź obligacje z opcją call, z opcją put) wycena wartości może być dokonana na podstawie modelu dwumianowego. Wycena wartości może być dokonana także przy wykorzystaniu metody symulacji (np. Monte Carlo). Metoda symulacji jest zalecana np. w przypadku obligacji hipotecznych bądź obligacji zabezpieczonych składnikami majątkowymi, gdyż wycena tych instrumentów zależy od ścieżki stóp procentowych (ang. *interest rate path*)[2].

Wyceny wartości na podstawie modelu dwumianowego oraz metody symulacyjnej mają wspólne cechy:

- wykorzystywane są stopy spot (np. wyznaczane na podstawie stóp zwrotu YTM),
- zakłada się oczekiwaną zmienność stóp procentowych,
- tworzy się gałęzie drzewa stóp procentowych (model dwumianowy) bądź ścieżki stóp procentowych (model symulacyjny),
- następuje kalibracja modelu, co oznacza proces zapewnienia zgodności wyznaczanej ceny np. obligacji z aktualną ceną rynkową,
- stosowane są kryteria realizacji opcji (model dwumianowy) bądź kryteria wcześniejszej spłaty w celu wyceny instrumentu z wbudowaną opcją.

---

[1] W przypadku wyceny obligacji poziom stóp spot wyklucza możliwość osiągania korzyści arbitrażowych wynikających z oderwania kuponów od obligacji (ang. *coupon stripping*). Słowo strip jest w tym zestawieniu oznacza odrębny handel zarejestrowanymi odcinkami obligacji na odsetki i kapitał (ang. **s**eparate **t**rading of **r**egistered **i**nterest and **p**rincipal).

[2] F.J. Fabozzi, *Fixed Income Analysis for the Chartered Financial Analyst Program*, Frank J. Fabozzi Associates, New Hope, Pennsylvania, 2000, Level II, rozdział 5.

1.2 Ekspozycja przy wykorzystaniu stóp spot i stóp forward

Ekspozycja - przykład obligacji

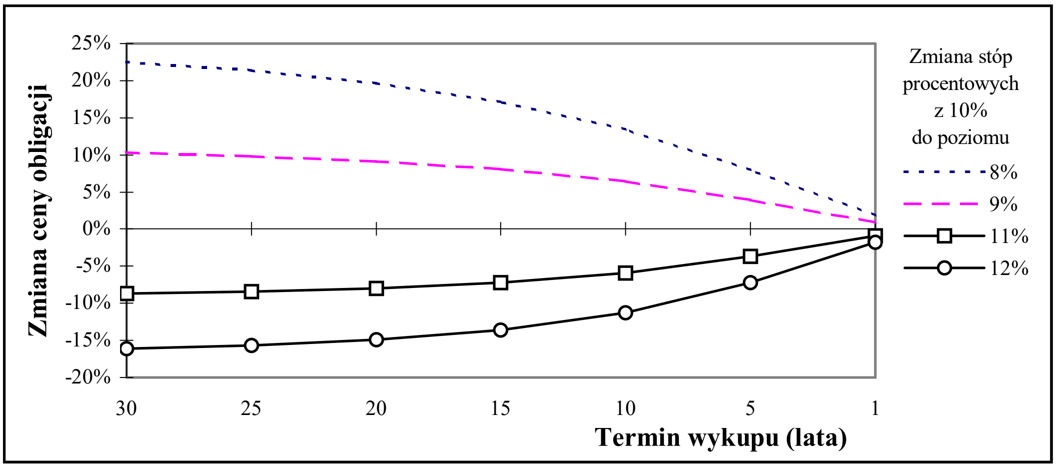
	Obligacja o stałym oprocentowaniu	Obligacja o zmiennym oprocentowaniu
Wycena tradycyjna	$P=\frac{cB}{(1+YTM)^1}+\frac{cB}{(1+YTM)^2}+\ldots+\frac{cB+B}{(1+YTM)^T}$	$P=\frac{z_1B}{(1+YTM)^1}+\frac{{}_2f_1B}{(1+YTM)^2}+\ldots+\frac{{}_Tf_{T-1}B+B}{(1+YTM)^T}$
Wycena wykluczająca arbitraż	$P=\frac{cB}{(1+z_1)^1}+\frac{cB}{(1+z_2)^2}+\ldots+\frac{cB+B}{(1+z_T)^T}$	$P=\frac{z_1B}{(1+z_1)^1}+\frac{{}_2f_1B}{(1+z_2)^2}+\ldots+\frac{{}_Tf_{T-1}B+B}{(1+z_T)^T}$

gdzie:
P - cena,
c - stała stopa kuponowa,
B - cena nominalna,
YTM - stopa zwrotu,
${}_tf_{t-1}$ - stopa forward,
z_t - stopa spot.

1.2.1 Wpływ zmian stóp procentowych na wartość

Instrumenty finansowe (o stałym i zmiennym dochodzie) zmieniają wartość pod wpływem zmian stóp zwrotu wymaganych przez inwestorów. Wzrostowi (spadkowi) rynkowych stóp procentowych towarzyszy wzrost (spadek) wymaganych stóp zwrotu oraz równocześnie spadek (wzrost) cen rynkowych tych instrumentów. Przedstawione poniżej wnioski dotyczą wszystkich pozycji (w tym kredytów) o stałej bądź zmiennej stopie umownej. Zmiany stóp procentowych mają znaczny wpływ na wartość pozycji o stałym oprocentowaniu i nieznaczny (lecz ważny) wpływ na zmiany wartości pozycji o zmiennym oprocentowaniu. Efekty dla instrumentów o zmiennej stopie umownej są znacznie mniej „radykalne".

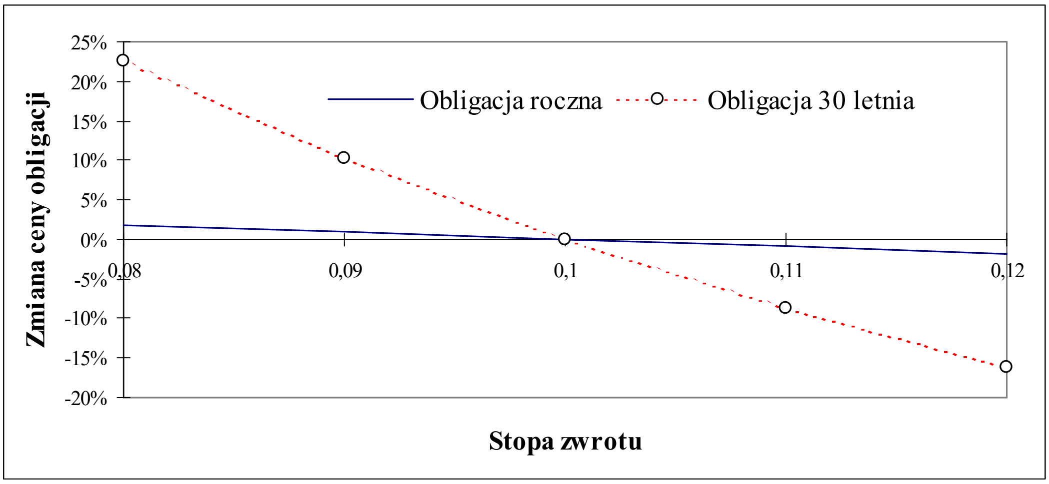
Wygodnie jest przedstawić rozważania na przykładzie obligacji o stałym kuponie.

- 

Rys. 1. Zmiana ceny obligacji w zależności od terminu wykupu
Źródło: Opracowanie własne.

Im krótszy jest okres do daty wykupu obligacji o stałym oprocentowaniu przy stałej stopie zwrotu, wartość rynkowa obligacji jest coraz bliższa wartości nominalnej. Tempo zmniejszania się premii bądź dyskonta jest coraz większe.

Im bardziej jest oddalony termin wykupu obligacji o stałym oprocentowaniu, tym większe są zmiany wartości obligacji, lecz coraz niższe jest tempo wzrostu (bądź spadku) wartości obligacji pod wpływem spadku (bądź wzrostu) stóp zwrotu. Zmiany te są mniejsze dla obligacji z wyższą stopą kuponową. Wzrost wartości obligacji spowodowany spadkiem stopy zwrotu jest większy niż spadek wartości obligacji spowodowany odpowiednim wzrostem stopy zwrotu (efekt wypukłości).



Rys. 2. Zmiana ceny obligacji w zależności od stopy zwrotu
Źródło: Opracowanie własne.

Zmiany stóp procentowych mają wpływ nie tylko na ceny, lecz również na faktycznie osiągane stopy zwrotu (ryzyko reinwestycji). Jeśli po nabyciu obligacji stopy procentowe spadną (wzrosną), odsetki będą reinwestowane według niższej (wyższej) stopy niż zakładana początkowo stopa zwrotu. Faktycznie zrealizowana stopa zwrotu z tej inwestycji będzie niższa (wyższa) niż oczekiwana stopa zwrotu.

Przykład 1. Zależność ceny obligacji od stóp procentowych i terminów wykupu

Obligacja ma cenę nominalną 100 zł i stałą stopę kuponową 10%.

Polecenia

1. Pokaż, jak zmieni się rynkowa cena obligacji w zależności od zmian wymaganej stopy zwrotu w przedziale 8-12% oraz dla różnych terminów wykupu 1 rok, 5, 10, 15, 20, 25 i 30 lat.
2. Przedstaw wrażliwość stopy zmian ceny rynkowej obligacji na podane zmiany wymaganej stopy zwrotu oraz terminy wykupu.

Rozwiązanie

Ad 1.

Wrażliwość ceny rynkowej obligacji na wymaganą stopę zwrotu oraz termin wykupu

	Termin wykupu (lata)						
Stopa	1	5	10	15	20	25	30
8%	101,9	108,0	113,4	117,1	119,6	121,3	122,5
9%	100,9	103,9	106,4	108,1	109,1	109,8	110,3
10%	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
11%	99,1	96,3	94,1	92,8	92,0	91,6	91,3
12%	98,2	92,8	88,7	86,4	85,1	84,3	83,9

Ad 2.

Wrażliwość zmian ceny rynkowej obligacji

	Termin wykupu (lata)						
Stopa	1	5	10	15	20	25	30
8%	1,9%	8,0%	13,4%	17,1%	19,6%	21,3%	22,5%
9%	0,9%	3,9%	6,4%	8,1%	9,1%	9,8%	10,3%
10%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
11%	-0,9%	-3,7%	-5,9%	-7,2%	-8,0%	-8,4%	-8,7%
12%	-1,8%	-7,2%	-11,3%	-13,6%	-14,9%	-15,7%	-16,1%

Przykład 2. Stopa zmiany ceny obligacji zerokuponowej

Dane są informacje o pięciu obligacjach zerokuponowych.

L.p.	Wartość nominalna	Termin wykupu	Stopa zwrotu (YTM)
1	1000	3	8%
2	1000	5	8%
3	1000	10	8%
4	1000	10	10%
5	1000	10	12%

Polecenia

Wyznacz ceny rynkowe obligacji zerokuponowych.

Jaka będzie nowa cena, gdy stopa zwrotu wzrośnie o 1 punkt procentowy ?

Ile wynosi stopa zmiany ceny ? Przedstaw wnioski z tej analizy.

Rozwiązanie

Wart. nom.	Termin	Stopa zwrotu	Cena	Nowa cena	St. zm. ceny
1000	3	8%	793,8	772,2	-2,7%
1000	5	8%	680,6	649,9	-4,5%
1000	10	8%	463,2	422,4	-8,8%
1000	10	10%	385,5	352,2	-8,7%
1000	10	12%	322,0	294,6	-8,5%

1.3 Modele stochastyczne

1.3.1 Modele równowagi ogólnej

Najbardziej znanym przykładem modelu równowagi ogólnej struktury terminowej jest model Coxa, Ingersolla i Rossa z 1985 roku. Zachowanie stóp procentowych opisuje proces stochastyczny[3]:

(1) $$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz$$

gdzie:

r - stopa procentowa spot,

θ - długoterminowy poziom stopy procentowej,

κ - parametr szybkości powrotu stopy spot do poziomu długoterminowej stopy,

σ - zmienność,

dt - chwilowy upływ czasu,

dz - standardowy, jednowymiarowy proces Wienera.

1.3.2 Modele wykluczające arbitraż

Modele te przyjmują postać liniowego stochastycznego równania różniczkowego:

[3] J.C.Cox, J.E. Ingersoll, Jr., Stephen Ross, *An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices*, „Econometrica", 1985, vol. 53, no. 2 s. 363-384 oraz tychże *Theory of the Term Structure of Interest Rates*, „Econometrica", 1985, vol. 53, no. 2 s. 385-407.

(2) $dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dz$

gdzie:
r - stopa procentowa spot,
μ - dryf,
σ - zmienność,
dt - chwilowy upływ czasu,
dz - standardowy, jednowymiarowy proces Wienera.

Model Ho-Lee jest jednym z pierwszych modeli wykluczających arbitraż. Zachowanie stóp procentowych opisuje stochastyczne równanie różniczkowe[4]:

(3) $dr = \mu(t)dt + \sigma dz$

Stopy procentowe mają rozkład normalny. Średnia stopa μ(t) jest ustalana możliwie dokładnie na podstawie aktualnej struktury stóp procentowych. Zmienność σ jest stała i nie zależy od poziomu stóp procentowych spot. Wadą modelu Ho-Lee jest możliwość (praktycznie rzadko) otrzymania ujemnych stóp procentowych. Inną wadą jest założenie stałego odchylenia standardowego. Poziom stóp procentowych przy skoku w górę i w dół na drzewku dwumianowym opisują równania:

(4) $r_u = r_0 + \mu(ts) + \sigma\sqrt{ts}$

(5) $r_d = r_0 + \mu(ts) - \sigma\sqrt{ts}$

gdzie:
ts - odcinek czasu pomiędzy krokami drzewka dwumianowego wyrażony jako ułamek roku.

W modelu logarytmiczno-normalnym (założenie przyjęte w modelu Blacka-Scholesa) proces stóp procentowych byłby następujący:

(6) $dr = \mu(t)\, r\, dt + \sigma\, r\, dz$

bądź równoważnie (przy zastosowaniu lematu Ito):

(7) $d\ln(r) = \left[\mu(t) - \frac{\sigma^2}{2}\right]dt + \sigma dz$

Model **Salomon Brothers** nie generuje ujemnych stóp procentowych. Zmienność σ zależy od poziomu stóp procentowych spot (zwiększa się w miarę wzrostu poziomu stóp procentowych). Ponadto zmienność stóp procentowych zmniejsza się w miarę wydłużenia terminu wygaśnięcia. Obserwacje potwierdzają takie zachowanie zmienności stóp procentowych, ale zmienność stóp procentowych generowana na podstawie modelu jest mniejsza. Model ignoruje tendencje powrotu do wartości średniej. Poziom stóp procentowych przy skoku w górę i w dół na drzewku dwumianowym opisują równania:

(8) $r_u = r_0 \exp^{\mu(ts)+\sigma\sqrt{ts}}$

(9) $r_d = r_0 \exp^{\mu(ts)-\sigma\sqrt{ts}}$

Model Blacka-Dermana-Toya wprowadza strukturę terminową zmienności stóp procentowych (zgodnie z obserwacjami empirycznymi). Odchylenie standardowe jest mniejsze dla długoterminowych stóp procentowych niż odchylenie standardowe dla

[4] T.S.Y. Ho, S. Lee, *Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims*, „Journal of Finance", 1986, vol. 41, no. 5.

krótkoterminowych stóp procentowych. Stopa procentowa krótkoterminowa charakteryzuje się również powrotem do wartości średniej (ang. *mean reversion*), lecz w stopniu odbiegającym od rzeczywistości (obserwacji empirycznych). Zachowanie stóp procentowych opisuje proces stochastyczny[5]:

(10) $dr = \mu(t)\, r\, dt + \sigma(t)\, r\, dz$

Skoki stóp procentowych na drzewku dwumianowym są następujące:

(11) $r_u = r_0 \exp^{\mu(ts)+\sigma(ts)\sqrt{ts}}$

(12) $r_d = r_0 \exp^{\mu(ts)-\sigma(ts)\sqrt{ts}}$

Model Blacka-Karasińskiego wyraźnie uwzględnia powrót stopy procentowej do wartości średniej oraz określa szybkość tego powrotu (zależną od czasu, nie od poziomu stóp procentowych. Wysokie stopy procentowe mają tendencje spadkowe, niskie stopy procentowe mają tendencje wzrostowe. Średnia stopa oraz zmienność stóp procentowych zależą od struktury terminowej stóp procentowych. Stopy procentowe wyznaczane na podstawie tego modelu nie mogą być ujemne. Stochastyczne równanie różniczkowe ma postać:[6]

(13) $dr = \kappa(t)\,\{\ln[\mu(t)] - \ln[r(t)]\}\, r\, dt + \sigma(t)\, r\, dz$

gdzie:

κ - parametr szybkości powrotu stopy spot do poziomu długoterminowej stopy.

Skoki stóp procentowych na drzewku dwumianowym są następujące:

(14) $r_u = r_0 \exp^{\kappa(ts)[\mu(ts) - r(ts)]ts+\sigma(ts)\sqrt{ts}}$

(15) $r_d = r_0 \exp^{\kappa(ts)[\mu(ts) - r(ts)]ts-\sigma(ts)\sqrt{ts}}$

Model ramowy Hulla i White'a[7] ma postać:

(16) $$dx = a\left[\frac{\theta(t)}{a} - x\right]dt + \sigma\, dz$$

Model ogólny można sprowadzić do modelu Blacka i Karasińskiego, podstawiając x=ln(r), a=a(t) oraz σ=σ(t). Model można sprowadzić do modelu Blacka, Dermana i Toya podstawiając x=ln(r) oraz a(t)=-σ'(t)/σ(t). Hull i White wprowadzają drzewo trójmianowe (drzewo z trzema łukami wychodzącymi z każdego wierzchołka).

Model Heatha, Jarrowa i Mortona[8] zakłada możliwość zmiany każdej ze stóp procentowych forward w zależności od specyficznych dla tej stopy czynników. Przy tym podejściu struktura terminowa stóp procentowych może się zmieniać. Stochastyczne równanie różniczkowe dla rodziny stóp forward ma postać:

(17) $$df(T) = \int_0^t \mu(v,T,\omega)dv + \sum_{i=1}^{n} \int_{i=1}^{t} \sigma_i(v,T,\omega)dW_i(v)$$

---

[5] F. Black, E. Derman, W. Toy, *A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options*, „Financial Analysts Journal", January 1990, vol. 46, no. 1, s. 33-39.

[6] Por. F. Black i P. Karasiński, *Bond and Option Pricing When Short Rates Are Lognormal*, „Financial Analysts Journal", 1991, vol. 47, no. 4.

[7] J. Hull i A. White, *Using Hull-White Interest Rate Trees*, „Journal of Derivatives", 1996, vol. 3, no. 3.

[8] D.Heath, R.Jarrow, A.Morton, *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology*, „Econometrica", 1996, vol. 60, no. 1, s. 77-105.

gdzie:
oznaczenia zmiennych modelu są podane w cytowanym artykule.

W celu porównania modeli jednoczynnikowych można zastosować następujący ogólny zapis[9]:

(18) $$dr(t) = [\alpha_1(t) + \alpha_2(t)r(t) + \alpha_3(t)\ln(r(t))]d(t) + [\beta_1(t) + \beta_2(t)r(t)]^{\gamma} dz$$

Tabela 1. Modele stochastyczne stóp procentowych

Autor	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	γ
Merton (1974)	☺			☺		1
Vasicek (1977)	☺	☺		☺		1
Brennan-Schwartz (1979)	☺	☺			☺	1
Cox-Ingersoll-Ross (1980)					☺	1,5
Cox-Ingersoll-Ross (1985)	☺	☺			☺	0,5
Ho-Lee (1986)	☺			☺		1
Salomon Brothers		☺			☺	1
Black-Derman-Toy		☺			☺	1
Black-Karasiński (1991)		☺	☺		☺	1
Pearson-Sun (1994)	☺	☺		☺	☺	0,5

Źródło: Opracowanie własne przy wykorzystaniu pomysłu tablicy z książki: A.Weron, R.Weron, *Inżynieria finansowa. Wycena instrumentów pochodnych. Symulacje komputerowe. Statystyka rynku*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998, s. 211.

1.4 Luka stopy procentowej. Duration

1.4.1 Luka duration

Najważniejszą metodą pomiaru ekspozycji wartości na ryzyko stopy procentowej jest metoda duration, nazywana także metodą analizy okresowej[10].

Duration i wypukłość obligacji z odsetkami co roku

Zależność zmiany ceny obligacji o stałym dochodzie od zmian stopy procentowej można ustalić **w sposób przybliżony** wykorzystując zmodyfikowany duration (D):

(19) $$\Delta P = - P\,D\,\Delta i \qquad \text{bądź} \qquad \frac{\Delta P}{P} = - D\,\Delta i$$

gdzie:
ΔP - zmiana ceny (rynkowej) obligacji,
P - cena (rynkowa) obligacji,
D- zmodyfikowany duration,
Δi - zmiana stopy procentowej (stopy zwrotu YTM).

[9] Wzór oraz pomysł zbiorczej tablicy zaczerpnięty z książki: A.Weron, R.Weron, *Inżynieria finansowa, Wycena instrumentów pochodnych, Symulacje komputerowe, Statystyka rynku*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998, s. 211.

[10] Nazwa wprowadzona przez S. Berezę, Por. S. Bereza, *Zarządzanie ryzykiem bankowym*, Związek Banków Polskich, Warszawa 1992, rozdz. 3.

Stopa zmiany wartości obligacji jest zapisywana już coraz rzadziej w zależności od tzw. zwykłego duration D_z oraz wyrażenia nazywanego szokiem stopy procentowej $\frac{\Delta i}{1+i}$:

(20) $$\frac{\Delta P}{P} = -D_z\left(\frac{\Delta i}{1+i}\right) = -\frac{D_z}{1+i}\cdot \Delta i$$

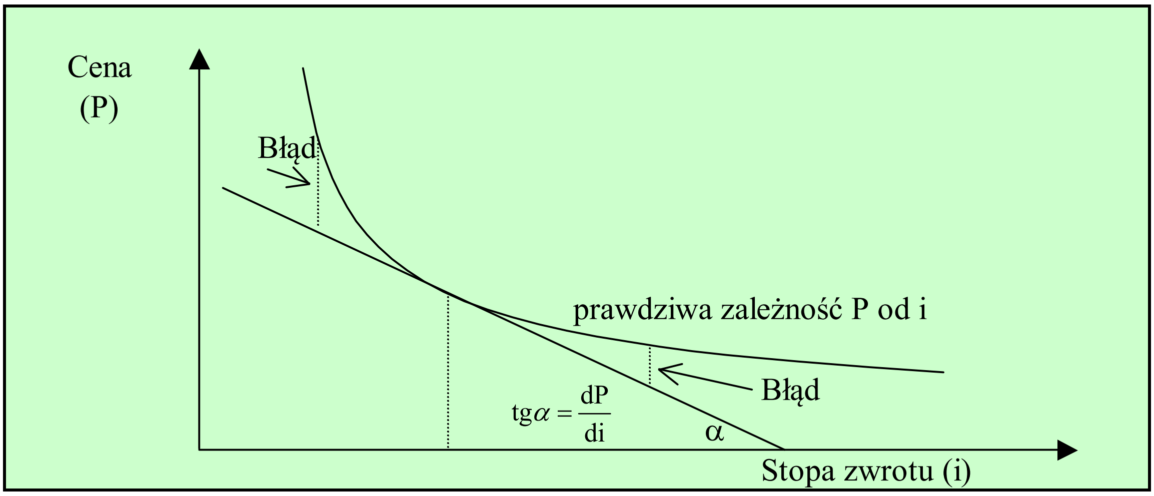
Zależność zmodyfikowanego duration od zwykłego duration można zapisać dla obligacji z odsetkami płaconymi co roku w postaci:

(21) $$D = \frac{D_z}{1+i}$$

Duration jest to wrażliwość zmiany wartości pozycji bądź instrumentu (zwykle o stałym umownym oprocentowaniu) na zmiany stopy procentowej (stopy zwrotu).

Duration dla obligacji zależy od aktualnej stopy zwrotu (i), stopy kuponowej (c), oraz terminu wykupu (T). Duration charakteryzuje się następującymi cechami:

1. Zwiększenie (zmniejszenie) stopy zwrotu (rynkowych stóp procentowych) powoduje skrócenie (wydłużenie) duration.
2. Zwiększenie (zmniejszenie) stopy kuponowej powoduje skrócenie (wydłużenie) duration.
3. Wrażliwość zmodyfikowanego duration na zmiany stopy kuponowej jest większa niż na zmiany stopy zwrotu.
4. Im bardziej oddalony jest termin wykupu tym większy jest duration, ale tempo wzrostu duration jest coraz mniejsze.



Rys. 3. Duration a prawdziwa zależność ceny od stopy zwrotu
Źródło: Opracowanie własne na podstawie: A.Saunders, *Financial Institutions Management*, A Modern Perspective, Irwin 1994, s. 119.

Zależność zmiany wartości instrumentu od zmian stopy procentowej można ustalić bardziej dokładnie wykorzystując zmodyfikowany duration (D) oraz **współczynnik wypukłości** (C):

(22) $$\frac{\Delta P}{P} = -D\Delta i + \frac{1}{2}C(\Delta i)^2$$

Współczynnik wypukłości jest wyrażony w latach podniesionych do kwadratu. Współczynnik ten może być również wyznaczony w sposób szacunkowy jako iloczyn czynnika skalującego oraz sumy zmian ceny obligacji (dodatniej i ujemnej) spowodowanej zmianą stóp procentowych.

Tabela 2. Zmodyfikowany duration oraz wypukłość dla wybranych klas obligacji

Obligacje	Zmodyfikowany duration	Współczynnik wypukłości
z odsetkami co roku	$D = \frac{B\left(c[1+i]\left[(1+i)^T - 1\right] + iT[i-c]\right)}{Pi^2(1+i)^{T+1}}$	$C = \frac{2B\left(c[1+i]^2\left[(1+i)^T - 1\right] - ciT[1+i] + i^2T[T+1]\frac{[i-c]}{2}\right)}{Pi^3(1+i)^{T+2}}$
zerokuponowe	$D = \frac{T}{(1+i)}$	$C = \frac{T(T+1)}{(1+i)^2}$
wieczyste (konsole)	$D = \frac{1}{i}$	$C = \frac{2}{i^2}$

gdzie:
P - cena obligacji,
i - stopa zwrotu w skali roku,
c - stopa kuponowa, stała stopa oprocentowania obligacji,
B - cena nominalna obligacji, kapitał
T - liczba okresów do terminu umorzenia.

Źródło: Opracowanie własne.

1.4.2 Efektywny duration i efektywna wypukłość

(23) $$D = \frac{V_- - V_+}{2V_0 \Delta y}$$

(24) $$C = \frac{V_- + V_+ - 2V_0}{V_0(\Delta y)^2}$$

1.4.3 PVPB

(25) $$PVBP = \left| \text{aktualna cena - cena przy zmianie stopy o 1 pkt bazowy} \right|$$

1.4.4 Luka terminów zapadalności i wymagalności

Brak dopasowania terminów zapadalności i wymagalności powoduje ryzyko stopy procentowej (a także ryzyko płynności). Inwestor (bank, instytucja finansowa, przedsiębiorstwo) może zabezpieczyć się przed ryzykiem refinansowania, ryzykiem reinwestycji oraz ryzykiem zmian wartości rynkowej aktywów i pasywów poprzez **dopasowanie** (ang. *matching*) terminów zapadalności i wymagalności. Podejście to jest nazywane metodą bądź modelem terminów zapadalności i wymagalności (ang. *maturity model*).

Bank może w pewnym stopniu uodpornić się (ang. *immunize*) na ryzyko stopy procentowej poprzez **dopasowanie** przeciętnych terminów zapadalności aktywów i wymagalności zobowiązań. Uodpornienie (ang. *immunization*) aktywów i pasywów na zmiany stóp procentowych wystąpi, gdy przeciętny termin zapadalności aktywów będzie równy przeciętnemu terminowi wymagalności pasywów. Pełne dopasowanie terminów to sytuacja, w której **luka terminów** jest równa zeru:

(26) $T_A - T_L = 0$

Przykład 3. Model terminów zapadalności i wymagalności

Bank inwestuje 100 mln zł kupując 3-letnie obligacje o stałym oprocentowaniu 10%. Inwestycje są finansowane 1-rocznym depozytem 90 mln zł o stałym oprocentowaniu w wysokości 10%.

Polecenia

1. Pokazać, jak zmieni się wartość kapitału banku w zależności od zmian stopy procentowej w przedziale 8-17%.
2. Czy ryzyko spowodowane zmianami stopy procentowej będzie wyeliminowane, gdy termin płatności depozytu będzie terminem 3-letnim ?

Rozwiązanie

Ad 1.

	Aktywa	Zobowiązania
Termin wykupu	3	1
Stopa kuponowa	10%	10%
W. nominalna	100	90

YTM	Aktywa	Zobowiązania	Kapitał	Δ Kapitału
8%	105,15	91,67	13,49	3,49
9%	102,53	90,83	11,71	1,71
10%	100,00	90,00	10,00	0,00
11%	97,56	89,19	8,37	-1,63
12%	95,20	88,39	6,80	-3,20
13%	92,92	87,61	5,31	-4,69
14%	90,71	86,84	3,87	-6,13
15%	88,58	86,09	2,50	-7,50
16%	86,52	85,34	1,18	-8,82
17%	84,53	84,62	-0,08	-10,08

Ad 2.

	Aktywa	Zobowiązania
Termin wykupu	3	3
Stopa kuponowa	10%	10%
W. nominalna	100	90

YTM	Aktywa	Zobowiązania	Kapitał	Δ Kapitału
8%	105,15	94,64	10,52	0,52
9%	102,53	92,28	10,25	0,25
10%	100,00	90,00	10,00	0,00
11%	97,56	87,80	9,76	-0,24
12%	95,20	85,68	9,52	-0,48
13%	92,92	83,62	9,29	-0,71
14%	90,71	81,64	9,07	-0,93
15%	88,58	79,73	8,86	-1,14
16%	86,52	77,87	8,65	-1,35
17%	84,53	76,08	8,45	-1,55

Przy dopasowania terminów zmiany wartości kapitału są mniejsze, ale występują.

1.4.5 Luka duration (bilansowy duration)

Duration możemy policzyć dla dowolnego kredytu bądź dowolnego depozytu, dowolnej pozycji aktywów bądź pasywów. Strumienie pieniężne nie muszą być regularne (tak jak w przypadku obligacji). Mogą być zróżnicowane. Uodpornienie bilansu na ryzyko stopy procentowej przy wykorzystaniu duration wymaga wyznaczenia luki duration dla całego bilansu.

Zmianę wartości aktywów i pasywów spowodowaną zmianą rynkowych stóp procentowych można zapisać w sposób następujący:

(27) $\Delta A = - D_A \cdot A \cdot \Delta y$

(28) $\Delta L = - D_L \cdot L \cdot \Delta y$

Zatem zmiana wartości netto (kapitału własnego banku bądź przedsiębiorstwa) może być wyrażona w sposób następujący:

(29) $\Delta E = -[D_A - D_L \cdot k] \cdot A \cdot \Delta y$

gdzie:
E - wartość netto (przedsiębiorstwa, banku),
A - aktywa,
L - zobowiązania,
y - stopa procentowa,
$k = \frac{L}{A}$ - miara dźwigni, obciążenie majątku (aktywów) zobowiązaniami.

Jeśli luka duration uwzględniająca dźwignię (D_A - D_L k) jest dodatnia, występuje zagrożenie wzrostem stóp procentowych powodujących spadek wartości kapitału własnego. Jeśli luka duration uwzględniająca dźwignię (D_A - D_L k) jest ujemna, występuje zagrożenie spadkiem stóp procentowych powodujących spadek wartości kapitału własnego.

Uodpornienie na ryzyko stopy procentowej można osiągnąć, gdy **luka** duration jest równa zeru:

(30) $D_A - D_L\, k = 0$

Przykład 4. Duration w zależności od stopy kuponowej i stopy zwrotu

Cena nominalna euroobligacji wynosi 1000 USD, termin wykupu wynosi 5 lat.
Odsetki są płacone rocznie.

Polecenia

1. Wyznaczyć duration dla następujących sytuacji:
   a. Stopa kuponowa wynosi 10%, stopa zwrotu 10%.
   b. Stopa kuponowa wynosi 10%, stopa zwrotu 15%.
   c. Stopa kuponowa wynosi 10%, stopa zwrotu 5%.
   d. Stopa kuponowa wynosi 15%, stopa zwrotu 10%.
   e. Stopa kuponowa wynosi 5%, stopa zwrotu 10%.
2. Przedstawić analizę wrażliwości zmodyfikowanego duration na zmiany stopy kuponowej i stopy zwrotu w przedziale 2-20%.

Rozwiązanie

Ad 1.

Stopa kuponowa	10%	Stopa zwrotu	10%

Rok	Strumień	Wsp. dysk.	Str. zdysk.	Udział	Rok * udział
1	100	0,9091	90,91	0,0909	0,0909
2	100	0,8264	82,64	0,0826	0,1653
3	100	0,7513	75,13	0,0751	0,2254
4	100	0,6830	68,30	0,0683	0,2732
5	1100	0,6209	683,01	0,6830	3,4151
			1000,00	1,0000	4,1699

Duration wynosi 4,17 lat.
Zmodyfikowany duration wynosi 4,17 * 1/(1+10%) = 3,79.

Stopa kuponowa	10%	Stopa zwrotu	15%

Rok	Strumień	Wsp. dysk.	Str. zdysk.	Udział	Rok * udział
1	100	0,8696	86,96	0,1045	0,1045
2	100	0,7561	75,61	0,0908	0,1817
3	100	0,6575	65,75	0,0790	0,2370
4	100	0,5718	57,18	0,0687	0,2748
5	1100	0,4972	546,89	0,6570	3,2851
			832,39	1,0000	4,0829

Duration wynosi 4,08 lat.
Zmodyfikowany duration wynosi 4,08 * 1/(1+15%) = 3,55.

Stopa kuponowa	10%	Stopa zwrotu	5%

Rok	Strumień	Wsp. dysk.	Str. zdysk.	Udział	Rok * udział
1	100	0,9524	95,24	0,0783	0,0783
2	100	0,9070	90,70	0,0746	0,1491
3	100	0,8638	86,38	0,0710	0,2130
4	100	0,8227	82,27	0,0676	0,2705
5	1100	0,7835	861,88	0,7085	3,5425
			1216,47	1,0000	4,2535

Duration wynosi 4,25 lat.
Zmodyfikowany duration wynosi 4,25 * 1/(1+5%) = 4,05.

Stopa kuponowa		15%	Stopa zwrotu		10%
Rok	Strumień	Wsp. dysk.	Str. zdysk.	Udział	Rok * udział
1	150	0,9091	136,36	0,1146	0,1146
2	150	0,8264	123,97	0,1042	0,2084
3	150	0,7513	112,70	0,0947	0,2842
4	150	0,6830	102,45	0,0861	0,3445
5	1150	0,6209	714,06	0,6003	3,0014
			1189,54	1,0000	3,9532

Duration wynosi 3,95 lat.
Zmodyfikowany duration wynosi 3,95 * 1/(1+10%) = 3,59.

Stopa kuponowa		5%	Stopa zwrotu		10%
Rok	Strumień	Wsp. dysk.	Str. zdysk.	Udział	Rok * udział
1	50	0,9091	45,45	0,0561	0,0561
2	50	0,8264	41,32	0,0510	0,1020
3	50	0,7513	37,57	0,0464	0,1391
4	50	0,6830	34,15	0,0421	0,1685
5	1050	0,6209	651,97	0,8044	4,0222
			810,46	1,0000	4,4879

Duration wynosi 4,49 lat.
Zmodyfikowany duration wynosi 4,49 * 1/(1+10%) = 4,08.

Ad 2.

Analiza wrażliwości

St. kup.	D
2%	4,3288
4%	4,1547
6%	4,0117
8%	3,8922
10%	3,7908
12%	3,7037
14%	3,6280
16%	3,5617
18%	3,5031
20%	3,4510

St. zwrotu	D
2%	4,2175
4%	4,1056
6%	3,9972
8%	3,8924
10%	3,7908
12%	3,6924
14%	3,5970
16%	3,5045
18%	3,4148
20%	3,3278

Przykład 5. Duration oraz współczynnik wypukłości

Cena nominalna obligacji wynosi 1000 zł, cena emisyjna 950 zł, stopa kuponowa 10%. Termin wykupu wynosi 15 lat. Odsetki są płacone co roku.

Polecenia

1. Wyznaczyć wewnętrzną stopę zwrotu, duration, zmod. duration i wsp. wypukłości.
2. Oblicz zmiany ceny obligacji, gdy stopa zwrotu zmieni się o +-1%, +-2% na podstawie duration, na podstawie duration z uwzględnieniem wypukłości, wg wzoru na obligację.

Rozwiązanie

Ad 1.

Rok	Strumień	Str. zdysk.	Udział	Duration	Wsp. wypukł.
t	CF_t	$\frac{CF_t}{(1+i)^t}$	$\frac{CF_t}{P(1+i)^t}$	$\frac{tCF_t}{P(1+i)^t}$	$\frac{t(t+1)CF_t}{P(1+i)^{t+2}}$
0	-950				
1	100	90,35	0,0951	0,0951	0,1553
2	100	81,63	0,0859	0,1718	0,4208
3	100	73,75	0,0776	0,2329	0,7604
4	100	66,63	0,0701	0,2805	1,1450
5	100	60,20	0,0634	0,3168	1,5518
6	100	54,39	0,0573	0,3435	1,9628
7	100	49,14	0,0517	0,3621	2,3644
8	100	44,40	0,0467	0,3739	2,7466
9	100	40,11	0,0422	0,3800	3,1018
10	100	36,24	0,0381	0,3815	3,4252
11	100	32,74	0,0345	0,3791	3,7135
12	100	29,58	0,0311	0,3737	3,9651
13	100	26,73	0,0281	0,3657	4,1795
14	100	24,15	0,0254	0,3558	4,3570
15	1100	239,98	0,2526	3,7891	49,4870
	YTM	P		Zw. duration	Wsp.wypukł.
	10,68%	950,00	1,0000	8,2016	83,3362

Wewnętrzna stopa zwrotu YTM wynosi 10,68%. Duration wynosi 8,20 lat. Zmodyfikowany duration wynosi 8,20 * 1/(1+10,7%) = 7,41. Współczynnik wypukłości wynosi 83,34.

Ad 2.

			Stopa zmiany ceny $\Delta P/P$		
Δi	i	Cena rynkowa	$\frac{\Delta P}{P} = -D\Delta i$	$-D\Delta i + \frac{1}{2}C(\Delta i)^2$	wg wzoru na cenę obligacji
-2%	8,68%	1108,16	14,82%	16,49%	16,65%
-1%	9,68%	1024,54	7,41%	7,83%	7,85%
0%	10,68%	950,00	0,00%	0,00%	0,00%
1%	11,68%	883,39	-7,41%	-6,99%	-7,01%
2%	12,68%	823,72	-14,82%	-13,15%	-13,29%

Przykład 6. Ryzyko stopy procentowej. Metoda duration

Bank inwestuje 100 mln zł kupując 3-letnie obligacje o stałym oprocentowaniu 10%.
Inwestycje są finansowane obligacjami 90 mln zł o stałym oprocentowaniu w wysokości 10%.

Polecenia

1. Jaki powinien być przeciętny duration zobowiązań, aby luka duration uwzględniająca dźwignię była równa zeru ?
2. Pokazać, jak zmieni się rynkowa wartość kapitału banku w zależności od zmian rynkowej stopy procentowej w przedziale 8-17%.
   Czy ryzyko spowodowane zmianami stopy procentowej będzie wyeliminowane, gdy termin płatności depozytu będzie terminem 3-letnim ?

Rozwiązanie

Ad 1.

Przeciętny duration dla aktywów wynosi 2,5. Po rozwiązaniu równania

$$D_A - kD_L = 0$$

otrzymujemy przeciętny duration dla zobowiązań 2,77.
Termin wykupu dla zobowiązań można wyznaczyć metodą iteracyjną.
Luka zerowa wystąpi dla terminu wykupu zobowiązań w wysokości 3,2795.

Ad 2.

	Aktywa	Zobow.
Termin wykupu	3	3,2795
Stopa kuponowa	10%	10%
W. nominalna	100	90

YTM	Aktywa	Zobow.	Kapitał	Δ Kapitału	D_A	D_L	k	Luka
8%	105,15	95,02	10,14	0,14	2,51	2,79	0,9	0,001
9%	102,53	92,46	10,07	0,07	2,50	2,78	0,9	0,000
10%	100,00	90,00	10,00	0,00	2,50	2,77	0,9	0,000
11%	97,56	87,63	9,93	-0,07	2,49	2,76	0,9	-0,001
12%	95,20	85,34	9,85	-0,15	2,48	2,76	0,9	-0,002
13%	92,92	83,14	9,78	-0,22	2,47	2,75	0,9	-0,003
14%	90,71	81,02	9,70	-0,30	2,46	2,74	0,9	-0,004
15%	88,58	78,97	9,61	-0,39	2,45	2,73	0,9	-0,005
16%	86,52	76,99	9,53	-0,47	2,44	2,72	0,9	-0,006
17%	84,53	75,09	9,45	-0,55	2,43	2,71	0,9	-0,007

Dostosowanie duration nie uodparnia w pełni na ryzyko stopy procentowej.

1.4.6 Luka funduszy. Model przeszacowania

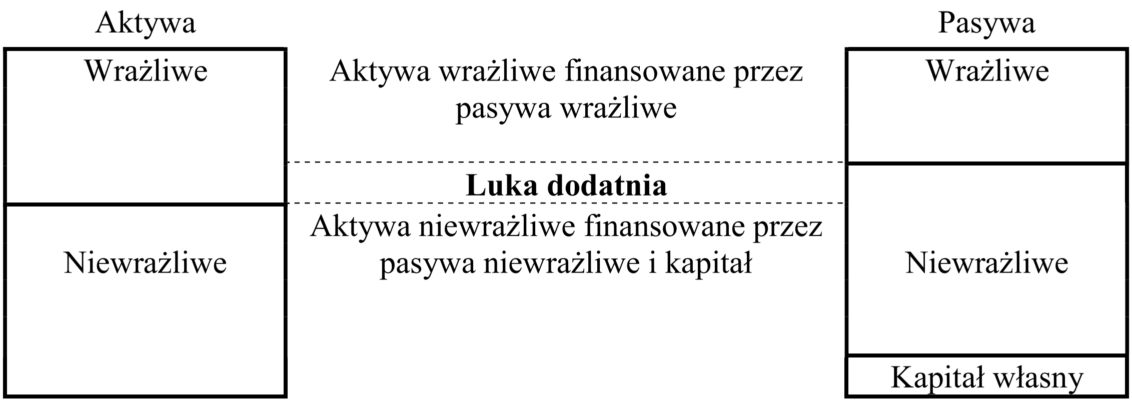
W badaniu ekspozycji marż na zmiany stóp umownych wykorzystywana jest metoda luki funduszy (ang. *funds gap management*)[11], metodą zarządzania luką (ang. *gap management*) bądź luką niedopasowania[12]. Stosuje się również termin "model

[11] Nazwa zarządzanie luką funduszy jest jedną ze starszych nazw określających tę metodę. Por. G.H. Hempel, A.B. Coleman, D.G. Simonson, op.cit., rozdz. 12.

[12] Por. S. Bereza, op.cit., rozdz. 3, a także rozdział p. Zofii Zawadzkiej *Ryzyko stopy procentowej* w książce *Współczesny bank*, red. L. Jaworski, Poltext, Warszawa 1998, s. 322-328.

przeszacowania" (ang. *repricing model*)[13]. Istota metody polega na badaniu ekspozycji **marży** na zmiany **umownych stóp procentowych**. Strumienie pieniężne (odsetki) zależą od umownych stóp procentowych. Możliwość zmian stóp umownych ma wpływ na przyszłe dochody (odsetki, marże). Przewidując wzrost stóp procentowych należy zatem dążyć do dodatniej luki funduszy. Przewidując spadek należy dążyć do ujemnej luki. Osiągnięcie pożądanej luki może spowodować wzrost marży, jeśli przewidywania zmian stóp procentowych okażą się trafne.

Metoda nie polega na podziale aktywów i pasywów na pozycje o stałym bądź zmiennym oprocentowaniu. Aktywa i pasywa są dzielone na **wrażliwe bądź niewrażliwe** ze względu na możliwość zmian stóp umownych w określonym przyszłym okresie. W przypadku omawianej metody „pozycja wrażliwa"[14] oznacza, że w określonym przyszłym okresie **strumienie pieniężne (odsetki) mogą zmieniać się pod wpływem zmian stóp umownych** (w tym samym kierunku i tym samym stopniu).



Rys. 4. Luka funduszy
Źródło: G.H. Hempel, A.B. Coleman, D.G. Simonson, *Bank Management, Text and Cases*, John Wiley & Sons, 1986, s. 544.

Dodatnia luka oznacza nadwyżkę aktywów wrażliwych nad pasywami wrażliwymi. (por. rysunek 4). **Ujemna luka** jest nadwyżką pasywów wrażliwych nad aktywami wrażliwymi. Należy wyraźnie podkreślić, że luka zależy od horyzontu badania ryzyka. Luka dla okresu najbliższego miesiąca będzie inna niż dla najbliższego półrocza, inna będzie dla najbliższego roku. W zależności od horyzontu badania luka może zmieniać znak.

Głównym celem metody jest pokazanie, jak zmienią się dochody odsetkowe netto pod wpływem zmiany stopy procentowej dla grup aktywów i pasywów z różnymi terminami. Zmianę marż w skali roku można obliczyć według wzoru:

(31) $\Delta DON_i = L_i \Delta R_i = (AWR_i - PWR_i)\ \Delta R_i$

gdzie:
ΔDON_i - zmiana dochodów odsetkowych netto w przyszłym okresie i,
L_i - luka w przyszłym okresie i,
ΔR_i - zmiana stopy procentowej,

[13] Por. A.Saunders, *Financial Institutions Management, A Modern Perspective*, Irwin 1994, rozdz. 7.

[14] Należy wyraźnie podkreślić, że w metodzie pomija się wrażliwość wartości pozycji o stałych stopach umownych na zmiany stóp procentowych (stóp zwrotu).

AWR_i - aktywa wrażliwe na zmiany stopy procentowej,
PWR_i - pasywa wrażliwe na zmiany stopy procentowej.

Efekt zmian stóp umownych jest również liczony dla skumulowanej luki. Luka skumulowana dzielona przez aktywa ogółem jest dość często przedstawiana w publikacjach w celu porównania sytuacji różnych banków. Znak tego miernika informuje o kierunku, natomiast wielkość o skali ekspozycji na ryzyko zmian stopy procentowej.

Stosowanie metody luki funduszy doprowadziło do zdefiniowania kilku pochodnych mierników ryzyka stopy procentowej. Współczynnik ryzyka stopy procentowej jest definiowany jako relacja aktywów wrażliwych na zmiany stopy procentowej do pasywów wrażliwych na zmiany stopy procentowej. Jeśli współczynnik ryzyka stopy procentowej jest większy od 1, bank zyskuje w przypadku wzrostu stóp procentowych.

Współczynnik ryzyka stopy procentowej ma postać:

$$\frac{\text{aktywa wrażliwe na zmiany stopy procentowej}}{\text{pasywa wrażliwe na zmiany stopy procentowej}} \tag{32}$$

Przykład 7. Luka i współczynnik ryzyka

Dane są aktywa i pasywa wrażliwe na zmiany stopy procentowej oraz odpowiadające im terminy wymagalności i zapadalności.

	Wrażliwe (skumulowane)				Niewrażliwe	Ogółem
	do 1M	do 3M	do 6M	do 1R		
Aktywa						
Środki pieniężne					15000	15000
Lokaty krótkoterminowe	5000	5000	5000	5000		5000
Papiery wartościowe	2000	3000	4000	6000	24000	30000
Kredyty	32000	35000	50000	60000	40000	100000
Razem	39000	43000	59000	71000	79000	150000
Pasywa						
Wkłady na żądanie					30000	30000
Lokaty krótkoterminowe	30500	31000	35000	39000	10000	49000
Książeczki oszczędnościowe					10000	10000
Certyfikaty depozytowe	3000	10000	20000	30000	2000	32000
Wkłady publiczne	500	2000	3000	10000	5000	15000
Pożyczki	3500	4000	4000	4000		4000
Kapitał					10000	10000
Razem	37500	47000	62000	83000	67000	150000

Polecenia

1. Wyznaczyć lukę dla każdej grupy terminów oraz współczynnik ryzyka stopy procentowej.
2. Określić wpływ zmian stóp procentowych o +-1% na marżę dla każdej luki terminowej.

Rozwiązanie

Ad 1.

	do 1M	do 3M	do 6M	do 1R
Luka	1500	-4000	-3000	-12000
Współczynnik ryzyka	1,04	0,91	0,95	0,86

Ad 2.

Zmiana marży, gdy R+1%	15	-40	-30	-120
Zmiana marży, gdy R-1%	-15	40	30	120