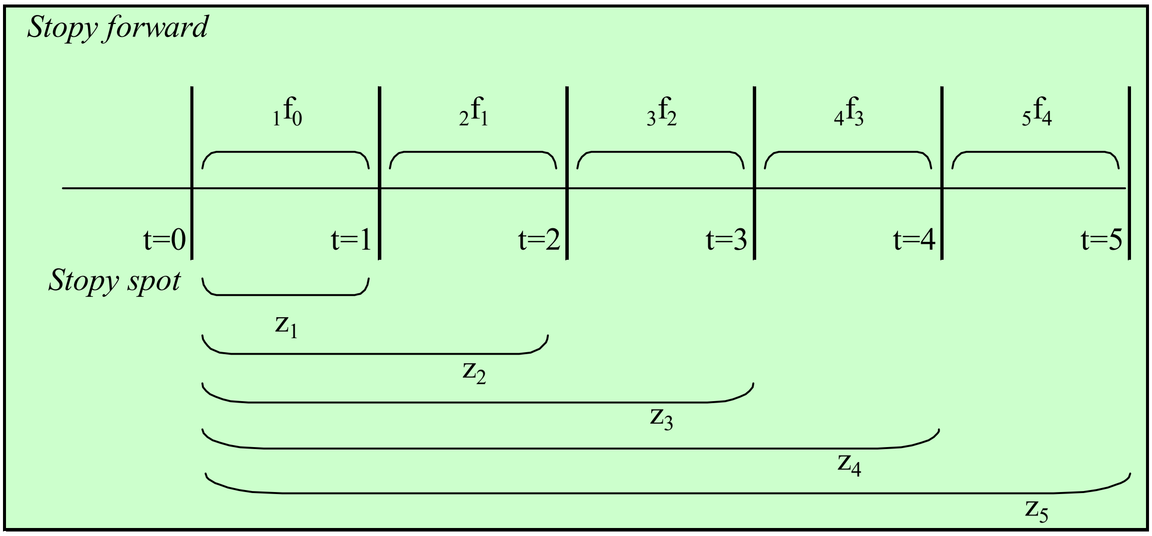
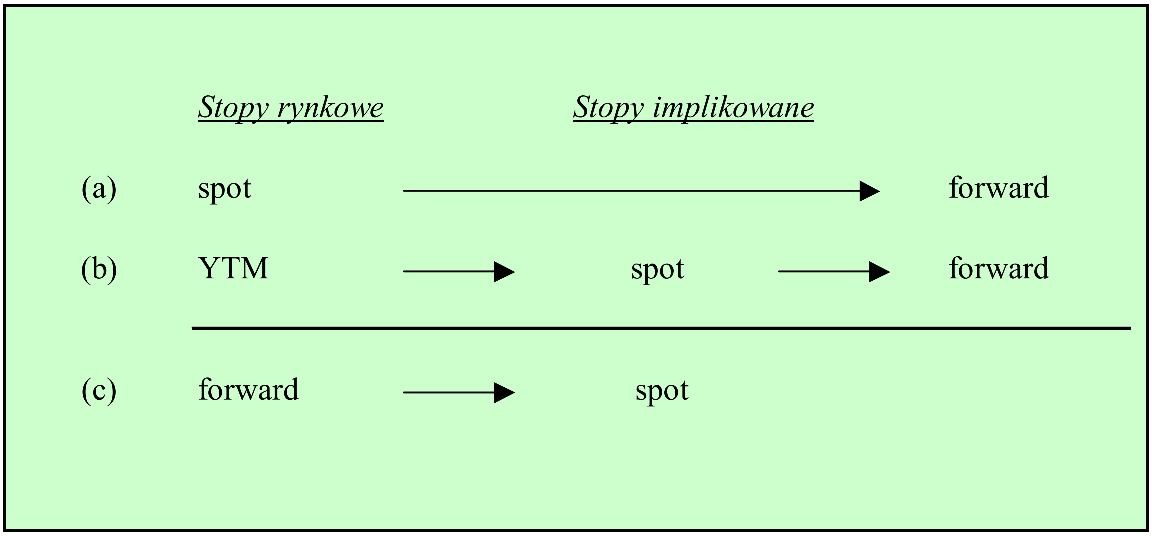
# Stopy spot i stopy forward. Bootstrapping

1. Rynkowe a teoretyczne (implikowane) stopy spot i stopy forward
2. Zależności pomiędzy stopami spot a stopami forward
3. Stopy forward dla instrumentów rynku kapitałowego.
4. Stopy forward dla instrumentów rynku pieniężnego.
5. Sposób notowań procentowych kontraktów futures - link CME.
6. Bootstrapping

## 1.1 Stopy spot i stopy forward




**Rys. 1. Stopy spot i stopy forward**
Źródło: Opracowanie własne.




Rys. 1. Implikacje stóp procentowych
Źródło: Opracowanie własne.

## Stopa spot jako funkcja stóp forward

Zależność stopy spot dla okresu złożonego z T podokresów od stóp forward jest następująca[1]:

(1) $$(1+z_T)^T = (1+{}_1f_0)(1+{}_2f_1)\ldots(1+{}_Tf_{T-1})$$

gdzie:
${}_tf_{t-1}$ - stopa forward,
$z_T$ - stopa spot dla okresu obejmującego podokresy t=1,2, T,
T - liczba podokresów do terminu wykupu.

Stopa spot jest średnią geometryczną stóp forward:

(2) $$z_T = \sqrt[T]{(1+{}_1f_0)(1+{}_2f_1)\ldots(1+{}_Tf_{T-1})} - 1$$

Przy zastosowaniu kapitalizacji ciągłej stopa spot jest średnią arytmetyczną stóp forward. Mamy odpowiednio:

(3) $$e^{Tz_T^*} = e^{{}_1f_0^*}e^{{}_2f_1^*}\ldots e^{{}_Tf_{T-1}^*} = e^{{}_1f_0^*+{}_2f_1^*+\ldots+{}_Tf_{T-1}^*} = e^{\sum_{t=0}^{T-1}{}_{t+1}f_t^*}$$

oraz

(4) $$z_T^* = \frac{{}_1f_0^*+{}_2f_1^*+\ldots+{}_Tf_{T-1}^*}{T} = \frac{\sum_{t=0}^{T-1}{}_{t+1}f_t^*}{T}$$

## Współczynnik dyskontujący

Cena zerokuponowej obligacji o wartości nominalnej 1 zł (współczynnik dyskontujący) przy zastosowaniu kapitalizacji dyskretnej może być zapisana w sposób następujący:

(5) $$P = \frac{1}{(1+z_T)^T} = \frac{1}{(1+{}_1f_0)(1+{}_2f_1)\ldots(1+{}_Tf_{T-1})}$$

Odpowiedni zapis przy zastosowaniu kapitalizacji ciągłej ma postać:

(6) $$P = \exp\left[-Tz_T^*\right] = \exp\left[-\left({}_1f_0^*+{}_2f_1^*+\ldots+{}_Tf_{T-1}^*\right)\right] = \exp\left[-\sum_{t=0}^{T-1}{}_{t+1}f_t^*\right]$$

Ponieważ cenę forward zerokuponowej obligacji dla dowolnego podokresu można zapisać w sposób następujący:

(7) $${}_{t+1}F_t = \frac{1}{1+{}_{t+1}f_t} \qquad \text{(kapitalizacja dyskretna)}$$

(8) $${}_{t+1}F_t = \exp\left[-{}_{t+1}f_t^*\right] \qquad \text{(kapitalizacja ciągła)}$$

więc cena zerokuponowej obligacji o wartości nominalnej 1 zł (współczynnik dyskontujący) może być zapisana jako iloczyn cen forward:

(9) $$P = {}_1F_0\ {}_2F_1 \ldots {}_TF_{T-1}$$

[1] Dla pierwszego okresu stopa forward jest równa stopie spot, a więc ${}_1f_0=z_1$. Zapis, w którym pierwsza stopa występuje jako stopa spot $z_1$, został przedstawiony przez Hicksa. Por. J.R.Hicks, *Value and Capital*, 2 wyd., Oxford University Press, Londyn, 1942, s. 141-145.

## Implikowane stopy forward dla instrumentów rynku pieniężnego

Stopy procentowe dla instrumentów rynku pieniężnego są stopami spot, gdy odsetki są płacone jednorazowo po upływie określonego terminu. Takimi instrumentami są np. depozyty (w tym depozyty eurowalutowe), certyfikaty depozytowe itp. W przypadku instrumentów dyskontowych (np. bonów skarbowych, bonów pieniężnych NBP) odsetki są liczone z góry. Stopa dyskonta w skali roku nie jest stopą spot. Stopą spot dla bonów skarbowych jest tzw. stopa rentowności. W celu otrzymania stopy spot na podstawie znanej stopy dyskonta dla dowolnego instrumentu dyskontowego można wykorzystać zależność:

$$(10) \qquad 1 - \tilde{z}_t \frac{d_t}{360} = \frac{1}{1 + z_t \frac{d_t}{360}}$$

Stopa spot wynosi:

$$(11) \qquad z_t = \frac{\tilde{z}_t}{1 - \tilde{z}_t \frac{d_t}{360}}$$

gdzie:
$z_t$ - stopa spot (stopa rentowności bonów skarbowych),
$\tilde{z}_t$ - stopa dyskonta.
$d_t$ - liczba dni.

**Implikowana stopa forward** dla krótkoterminowego instrumentu pieniężnego jest wyznaczana na podstawie równania:

$$(12) \qquad \left(1 + {}_t f_{t-1} \frac{(d_t - d_{t-1})}{360}\right)\left(1 + z_{t-1} \frac{d_{t-1}}{360}\right) = \left(1 + z_t \frac{d_t}{360}\right)$$

gdzie:
${}_t f_{t-1}$ - stopa forward,
$z_t$ - stopa spot.

Implikowane stopy forward dla instrumentów krótkoterminowych są wyznaczane w kolejnych iteracjach na podstawie wzoru (13) bądź (14):

$$(13) \qquad {}_t f_{t-1} = \frac{\left[\dfrac{z_t d_t - z_{t-1} d_{t-1}}{d_t - d_{t-1}}\right]}{\left(1 + \dfrac{z_{t-1} d_{t-1}}{360}\right)}$$

Stopy forward dla krótkoterminowego instrumentu sprzedawanego z dyskontem (np. bony skarbowe) mogą być wyznaczone bezpośrednio na podstawie stóp dyskonta:

$$(14) \qquad {}_t f_{t-1} = \frac{\left[\dfrac{\tilde{z}_t d_t - \tilde{z}_{t-1} d_{t-1}}{d_t - d_{t-1}}\right]}{\left(1 - \dfrac{\tilde{z}_t d_t}{360}\right)}$$

**Przykład 1. Implikowana stopa forward**

Załóżmy, że cena eurodolarowego kontraktu futures z terminem wygaśnięcia 28 dni wynosi 94,70. Bieżąca stopa depozytów eurodolarowych na 28 dni wynosi 5,00%, a dla depozytów na 118 dni wynosi 5,15%.

Polecenia:

1. Wyznaczyć implikowaną stopę forward dla depozytów eurodolarowych.
2. Porównując tę stopę ze stopą dla kontraktu futures ustalić czy inwestor powinien kupić, czy sprzedać futures.
3. Jaką stopę zwrotu osiągnie inwestor dla okresu 118 dni składając depozyt na 28 dni oraz kupując kontrakt futures z terminem wygaśnięcia 28 dni ?

**Rozwiązanie**

Ad 1.

Relacja pomiędzy bieżącymi stopami a implikowaną stopą ${}_2f_1$ jest następująca:

$$\left(1+\frac{r_2 t_2}{360}\right)=\left(1+\frac{r_1 t_1}{360}\right)\left(1+\frac{{}_2f_1(t_2-t_1)}{360}\right)$$

Implikowana stopa forward ${}_2f_1$ wynosi zatem:

$${}_2f_1=\left[\frac{\left(1+\frac{r_2 t_2}{360}\right)}{\left(1+\frac{r_1 t_1}{360}\right)}-1\right]\frac{360}{t_2-t_1} \qquad = \qquad 5.18\%$$

Ad 2.

Powinien kupić futures, gdyż stopa dla kontraktu futures 5,30% jest wyższa niż 5,18%.

Ad 3. Stopa zwrotu wynosi:

$$i_2=\left\{\left(1+\frac{r_1 t_1}{360}\right)\left(1+\frac{{}_2f_1(t_2-t_1)}{360}\right)-1\right\}\frac{360}{t_2} \qquad = \qquad 5.24\%$$

((1+5,00% * 28 / 360 ) ( 1+5,30% * 90 / 360 ) - 1)( 360/ 118)

## Implikowane stopy forward dla instrumentów rynku kapitałowego

Jeśli okresy dla stóp spot zamykają się kolejnymi pełnymi latami, to implikowane stopy forward mogą być wyznaczone na podstawie wzoru:

$$(15) \qquad (1+z_y)^y=(1+z_x)^x(1+{}_yf_x)^{y-x}$$

a więc:

$$(16) \qquad {}_yf_x=\left[\frac{(1+z_y)^y}{(1+z_x)^x}\right]^{\frac{1}{y-x}}-1$$

### Implikowane stopy forward dla obligacji z odsetkami co roku

Cenę obligacji o stałym oprocentowaniu z odsetkami płaconymi co roku przedstawia wzór:

(17) $$P = \frac{cB}{(1+i)^1} + \frac{cB}{(1+i)^2} + ... + \frac{cB+B}{(1+i)^T}$$

gdzie:
P - wartość wyceny obligacji, nazywana także wewnętrzną wartością obligacji,
c - stopa kuponowa, stała stopa oprocentowania obligacji,
B - cena nominalna obligacji, kapitał,
cB - kwota oprocentowania na kuponie płatna w końcu każdego okresu,
i - wymagana stopa zwrotu w skali roku dla danej klasy obligacji charakteryzujących się określonym ryzykiem,
t =1,2,...,T - okres.

Dysponując informacjami dotyczącymi stóp kuponowych oraz stóp zwrotu (YTM) obligacji, cenę rynkową obligacji z odsetkami co roku wyznaczymy korzystając z wzoru (17). Stopy spot dla obligacji z odsetkami płatnymi co roku są wyznaczane na podstawie rekurencyjnego wzoru:

(18) $$z_k = \left( \frac{B(1+c)}{P_M - cB\sum_{t=1}^{k-1}\frac{1}{(1+z_t)^t}} \right)^{\frac{1}{k}} - 1$$

gdzie:
$P_M$ - cena rynkowa obligacji,

Implikowane stopy forward są wyznaczane na podstawie stóp spot:

(19) $$\begin{aligned} {}_1f_0 &= z_1 \\ {}_2f_1 &= \frac{(1+z_2)^2}{(1+z_1)^1} - 1 \\ {}_3f_2 &= \frac{(1+z_3)^3}{(1+z_2)^2} - 1 \\ &... \end{aligned}$$

## 1.2 Bootstrapping

Gdy znamy stopy kuponowe oraz stopy zwrotu (YTM) obligacji z odsetkami co pół roku możemy łatwo wyznaczyć rynkową cenę obligacji na podstawie wzorów:

(20) $$P_M = \frac{\frac{c}{2}B}{\left(1+\frac{YTM}{2}\right)^1} + \frac{\frac{c}{2}B}{\left(1+\frac{YTM}{2}\right)^2} + ... + \frac{\frac{c}{2}B + B}{\left(1+\frac{YTM}{2}\right)^T}$$

gdzie:

B - cena nominalna obligacji, kapitał,
c - stopa kuponowa,
YTM - stopa zwrotu,
T - termin wykupu.

Krzywa teoretycznych stóp spot powstaje w wyniku dekompozycji strumieni płatności dla serii obligacji z różnymi terminami wykupu. Każda iteracja odpowiada wyznaczeniu stopy dla określonego terminu płatności i obejmuje:

1. wyznaczenie strumienia zdyskontowanego dla ostatniej płatności jako różnicy pomiędzy aktualną ceną rynkową obligacji z określonym terminem wykupu a sumą płatności odsetek zdyskontowanych według stóp spot wyznaczonych w poprzednich iteracjach (w pierwszej iteracji przyjmowana jest aktualna stopa zwrotu),
2. wyznaczenie współczynnika dyskontowego dla ostatniej płatności,
3. wyznaczenie na podstawie współczynnika dyskontowego stopy spot dla ostatniej płatności.

Stopy spot w przypadku obligacji z odsetkami płatnymi co pół roku są wyznaczane na podstawie rekurencyjnego wzoru:

$$z_k = 2\left\{\left[\frac{B(1+\frac{c}{2})}{P_M - \frac{c}{2}B\sum_{t=1}^{k-1}\frac{1}{\left(1+\frac{z_t}{2}\right)^t}}\right]^{\frac{1}{k}} - 1\right\} \qquad (21)$$

gdzie:

B - cena nominalna obligacji, kapitał,
c - stopa kuponowa,
YTM - stopa zwrotu,
T - terminu wykupu.

Wyznaczone teoretyczne stopy spot są racjonalnymi stopami zwrotu dla obligacji zerokuponowych z odpowiednimi terminami wykupu. Jeśli stopy zwrotu dla obligacji zerokuponowych odbiegałyby od wyznaczonych stóp spot, możliwy byłby korzystny arbitraż pomiędzy zakupem portfela obligacji z odsetkami oraz portfela obligacji zerokuponowych Niestety obligacje zerokuponowe są emitowane raczej rzadko. Natomiast w praktyce czasami występuje proces dekompozycji obligacji z odsetkami na odrębne płatności. Proces ten jest nazywany odrywaniem kuponów (ang. *coupon stripping*)[2]. Przedstawiony sposób wyznaczania stóp spot może być zatem wykorzystany przy ustaleniu racjonalnego poziomu stóp zwrotu dla odrębnie sprzedawanych odcinków obligacji.

Na podstawie stóp spot możemy wyznaczyć implikowane stopy forward. Stopy forward tworzą implikowaną krzywą forward. Półroczne stopy forward wyrażone w skali roku wyznaczamy w procesie iteracyjnym:

[2] Słowo strip jest w tym zestawieniu oznacza odrębny handel zarejestrowanymi odcinkami obligacji na odsetki i kapitał (ang. **s**eparate **t**rading of **r**egistered **i**nterest and **p**rincipal).

$$
\begin{aligned}
&{}_1f_0 = z_1 \\
&{}_2f_1 = 2\left[\frac{\left(1+\frac{z_2}{2}\right)^2}{\left(1+\frac{z_1}{2}\right)^1} - 1\right] \\
&{}_3f_2 = 2\left[\frac{\left(1+\frac{z_3}{2}\right)^3}{\left(1+\frac{z_2}{2}\right)^2} - 1\right] \\
&\ldots
\end{aligned}
\qquad (22)
$$

**Przykład 2. Zależność stóp spot od stóp forward. Współczynnik dyskontujący**

Dane są stopy spot w skali roku:

| Okres | Stopa zero |
|---|---|
| 1 | 5% |
| 2 | 6% |
| 3 | 7% |
| 4 | 8% |

Polecenia:

1. Wyznaczyć współczynniki kapitalizacji, współczynniki aktualizacji oraz stopy forward.
2. Wyznaczyć stopy spot kapitalizacji ciągłej oraz współczynniki kapitalizacji.
3. Wyznaczyć stopy forward kapitalizacji ciągłej, a na ich podstawie stopy spot kapitalizacji ciągłej.
4. Wyznaczyć ceny serii zerokuponowych obligacji na podstawie:
   a. stóp spot kapitalizowanych w sposób ciągły,
   b. stóp forward kapitalizowanych w sposób ciągły.
5. Wyznaczyć ceny forward serii zerokuponowych obligacji.
   Wyznaczyć ceny serii zerokuponowych obligacji na podstawie cen forward.

**Rozwiązanie**

Ad 1.

| t | $z_t$ | $(1+z_T)^T$ | $\frac{1}{(1+z_T)^T}$ | ${}_t f_{t-1}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5% | 105,00% | 95,24% | 5,00% |
| 2 | 6% | 112,36% | 89,00% | 7,01% |
| 3 | 7% | 122,50% | 81,63% | 9,03% |
| 4 | 8% | 136,05% | 73,50% | 11,06% |

Ad 2. Ad 3.

| t | $z_T^* = \ln(1+z_T)$ | $e^{Tz_T^*}$ | ${}_t f_{t-1}{}^* = \ln(1+{}_t f_{t-1})$ | $z_T^* = \frac{\sum_{t=0}^{T-1} {}_{t+1}f_t^*}{T}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4,88% | 105,00% | 4,88% | 4,88% |
| 2 | 5,83% | 112,36% | 6,77% | 5,83% |
| 3 | 6,77% | 122,50% | 8,64% | 6,77% |
| 4 | 7,70% | 136,05% | 10,49% | 7,70% |

Ad 4. Ad 5.

| t | $P = \exp[-Tz_T^*]$ | $P = \exp\left[-\sum_{t=0}^{T-1} {}_{t+1}f_t^*\right]$ | ${}_{t+1}F_t = \exp[-{}_{t+1}f_t^*]$ | $P = \prod_{t=0}^{T-1} {}_{t+1}F_t$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 95,24% | 95,24% | 95,24% | 95,24% |
| 2 | 89,00% | 89,00% | 93,45% | 89,00% |
| 3 | 81,63% | 81,63% | 91,72% | 81,63% |
| 4 | 73,50% | 73,50% | 90,04% | 73,50% |

**Przykład 3. Bootstrapping**

Dane są informacje o obligacjach skarbowych z odsetkami płatnymi co pół roku.

| Termin wykupu | Stopa kuponowa | Stopa zwrotu |
|---|---|---|
| 1 | 0,0% | 6,0% |
| 2 | 0,0% | 6,4% |
| 3 | 6,0% | 7,0% |
| 4 | 7,0% | 7,5% |
| 5 | 9,0% | 7,8% |
| 6 | 8,0% | 8,1% |

Dzisiejszy dzień: 20-11-98.
Stała kwota kapitału wynosi 100 mln zł.
Polecenia:

1. Wyznaczyć ceny rynkowe obligacji, teoretyczne stopy spot oraz stopy forward.
2. Porównać strumienie pieniężne odsetek wg stopy kuponowej i zwrotu kapitału
   a. zdyskontowane wg stóp spot
   b. zdyskontowane wg wewnętrznej stopy zwrotu (YTM)
   dla obligacji z trzyletnim terminem wykupu
3. Ile wynosi suma strumieni pieniężnych odsetek wg stóp forward i zwrotu kapitału zaktualizowanych wg stóp spot ?

**Rozwiązanie**

Ad 1.

| $t$ | $c_t$ | YTM | $P_M$ | $z_t$ | $1/(1+z_t/2)^t$ | ${}_tf_{t-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0000% | 3,0000% | 97,09 | 6,0000% | 0,971 | 6,0000% |
| 2 | 0,0000% | 3,2000% | 93,89 | 6,4000% | 0,939 | 6,8008% |
| 3 | 3,0000% | 3,5000% | 98,60 | 7,0226% | 0,902 | 8,2733% |
| 4 | 3,5000% | 3,7500% | 99,09 | 7,5471% | 0,862 | 9,1287% |
| 5 | 4,5000% | 3,9000% | 102,68 | 7,8766% | 0,824 | 9,1997% |
| 6 | 4,0000% | 4,0500% | 99,74 | 8,1891% | 0,786 | 9,7588% |

Stopy spot są wyznaczane w sposób iteracyjny:

$$97{,}09 = \frac{100}{(1+\frac{z_1}{2})^1}, \text{ stąd } z_1 = 6{,}0000\%$$

$$93{,}89 = \frac{0}{(1+0{,}03)^1} + \frac{100}{(1+\frac{z_2}{2})^2}, \text{ stąd } z_2 = 6{,}4000\%$$

$$98{,}60 = \frac{3}{(1+0{,}03)^1} + \frac{3}{(1+0{,}032)^2} + \frac{103}{(1+\frac{z_3}{2})^3}, \text{ stąd } z_3 = 7{,}0226\%$$

$$99{,}09 = \frac{3{,}5}{(1+0{,}03)^1} + \frac{3{,}5}{(1+0{,}032)^2} + \frac{3{,}5}{(1+0{,}035113)^3} + \frac{103{,}5}{(1+\frac{z_4}{2})^4},$$

stąd $z_4 = 7{,}5471\%$, itd.

Stopy forward są wyznaczane również w sposób iteracyjny:

$${}_1f_0 = 6{,}0000\%$$

$${}_2f_1 = 2\left[\frac{(1+3{,}2000\%)^2}{(1+3{,}0000\%)^1} - 1\right] = 6{,}8008\%$$

$${}_3f_2 = 2\left[\frac{(1+3{,}5113\%)^3}{(1+3{,}2000\%)^2} - 1\right] = 8{,}2733\%$$

$${}_4f_3 = 2\left[\frac{(1+3{,}7735\%)^4}{(1+3{,}5113\%)^3} - 1\right] = 9{,}1287\%$$

itd.

Wyznaczone stopy forward są stopami półrocznymi wyrażonymi w skali roku.

Ad 2.

Bez względu na sposób dyskontowania strumieni pieniężnych otrzymujemy cenę obligacji.

| | | St. dysk. = st. spot | | St. dysk. = YTM | |
|---|---|---|---|---|---|
| t | Str. pien. | Wsp.dys. | Str. zdysk. | Wsp.dys. | Str. zdysk. |
| 1 | 4,0000% | 0,971 | 3,8835% | 0,961 | 3,8443% |
| 2 | 4,0000% | 0,939 | 3,7558% | 0,924 | 3,6947% |
| 3 | 4,0000% | 0,902 | 3,6066% | 0,888 | 3,5509% |
| 4 | 4,0000% | 0,862 | 3,4492% | 0,853 | 3,4126% |
| 5 | 4,0000% | 0,824 | 3,2975% | 0,820 | 3,2798% |
| 6 | 104,0000% | 0,786 | 81,7458% | 0,788 | 81,9560% |
| | | Σ | 99,7383% | Σ | 99,7383% |

Ad 3.
Wartość odsetek liczonych wg stóp forward i zwrotu kapitału zdyskontowana wg stóp spot jest równa dzisiejszej wartości kapitału (100%).

| t | Str. pien. | Wsp.dys. | Str. zdysk. |
|---|---|---|---|
| 1 | 3,0000% | 0,971 | 2,9126% |
| 2 | 3,4004% | 0,939 | 3,1928% |
| 3 | 4,1367% | 0,902 | 3,7298% |
| 4 | 4,5643% | 0,862 | 3,9358% |
| 5 | 4,5998% | 0,824 | 3,7920% |
| 6 | 104,8794% | 0,786 | 82,4370% |
| | | Σ | 100,0000% |