Ryzyko stopy procentowej. Struktury stóp procentowych. Konwersje

1. Definicja stopy procentowej. Definicja pieniądza.
2. Pojęcie stopy wolnej od ryzyka. Stopy NBP.
3. Stopy na rynku depozytów międzybankowych.
4. Struktura podmiotowa (AAA, AA itd.). Struktura terminowa.
5. Ryzyko reinwestycji i refinansowania.
6. Ryzyko stopy procentowej wg BIS.
7. Konwersje stóp procentowych

1.1 Ryzyko refinansowania i reinwestycji

Ryzyko refinansowania (ang. *refinancing risk*) występuje, gdy terminy zapadalności aktywów są dłuższe niż terminy wymagalności zobowiązań. Stopa kosztu refinansowania aktywów (ang. *roll over*) może być w przyszłości wyższa niż stopa zwrotu dla aktywów. Jeśli terminy zapadalności aktywów są dłuższe niż terminy wymagalności zobowiązań, to pod wpływem wzrostu stóp procentowych wartość rynkowa aktywów zmniejsza się bardziej niż wartość rynkowa pasywów. Sytuacja ta może doprowadzić do niewypłacalności.

<table>
<tr><th>Termin płatności</th><th>Aktywa</th><th>Pasywa</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="2">stopa zwrotu 10%</td><td>stopa kosztu 8%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>stopa kosztu ? %</td></tr>
</table>

Rys. 1. Ryzyko refinansowania
Źródło: Opracowanie własne.

Ryzyko reinwestycji (ang. *reinvestment risk*) występuje, gdy terminy wymagalności zobowiązań są dłuższe niż terminy zapadalności aktywów. Stopa zwrotu dla reinwestowanych źródeł finansowania może być w przyszłości niższa niż ich stopa kosztu. Jeśli terminy wymagalności zobowiązań są dłuższe niż terminy zapadalności aktywów, to pod wpływem spadku stóp procentowych wartość rynkowa pasywów zwiększa się bardziej niż wartość rynkowa aktywów. Sytuacja ta może doprowadzić do niewypłacalności.

<table>
<tr><th>Termin płatności</th><th>Aktywa</th><th>Pasywa</th></tr>
<tr><td>1</td><td>stopa zwrotu 10%</td><td rowspan="2">stopa kosztu 8%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>stopa zwrotu ? %</td></tr>
</table>

Rys. 2. Ryzyko reinwestycji
Źródło: Opracowanie własne.

1.2 Ryzyko stopy procentowej wg BIS

W dokumencie konsultacyjnym Komitetu Bazylejskiego podawane są następujące przyczyny ryzyka stopy procentowej: ryzyko przeszacowania, ryzyko krzywej dochodowości, ryzyko bazy oraz ryzyko opcji.

Ryzyko przeszacowania (ang. *repricing risk*) wynika ze zróżnicowania terminów wygaśnięcia pozycji o stałym oprocentowaniu oraz terminów przeszacowania pozycji o zmiennym oprocentowaniu (aktywów, pasywów oraz pozycji pozabilansowych). Zróżnicowanie to wpływa na dochód i wartość ekonomiczną.

Ryzyko krzywej dochodowości (ang. *yield curve risk*) wynika ze zmian nachylenia i kształtu krzywej dochodowości. Długoterminowa pozycja długa oraz krótkoterminowa pozycja krótka powoduje zmniejszenie wartości ekonomicznej kapitału w przypadku zmiany krzywej dochodowości na bardziej stromą.

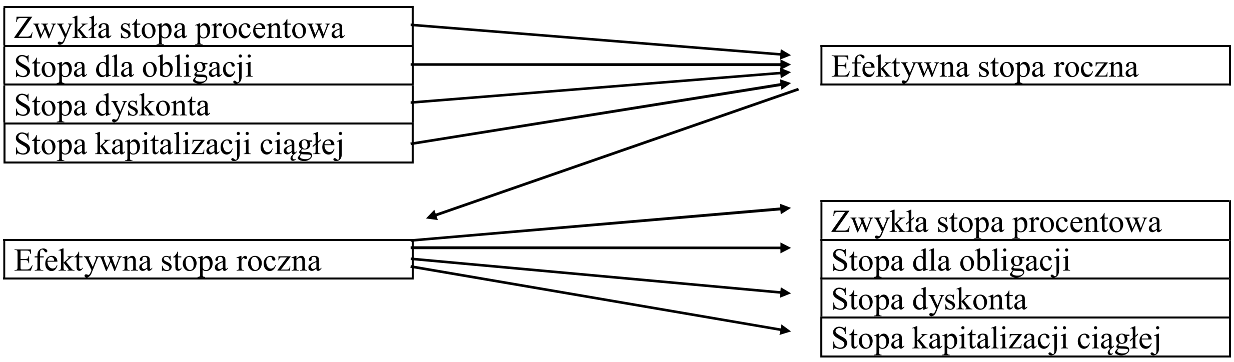
Ryzyko bazy (ang. *basis risk*) wynika ze zróżnicowania stóp zwrotu dla różnych instrumentów o tych samych terminach i częstotliwościach płatności. Przykładowo, pozycja aktywów zależna od stopy dla bonów skarbowych i pozycja pasywów zależna od stopy WIBOR wpłyną na zmniejszenie wyniku w przypadku zmniejszenia różnicy pomiędzy tymi stopami.

Ryzyko opcji (ang. *optionality*) wynika z zajmowania pozycji w opcjach bądź opcji wbudowanych w różne pozycje aktywów bądź pasywów.

1.3 Konwersje stóp procentowych

Ze względu na różne sposoby wyrażania stóp procentowych porównanie ich wymaga:

- konwersji stopy procentowej na równoważną **efektywną stopę roczną** (stopa ta będzie oznaczana w tym podrozdziale konsekwentnie symbolem i),
- konwersji **efektywnej stopy rocznej** na równoważną stopę w innym systemie notowania (np. na stopę dyskonta), stopę o innej częstotliwości bądź sposobie kapitalizacji, stopę dla innego instrumentu finansowego.



Rys. 3. Konwersje stóp procentowych
Źródło: Opracowanie własne.

1.3.1 Zwykła stopa procentowa

Zwykła stopa procentowa, nazywana także rynkową stopą zwrotu (ang. *money market yield*), jest stosowana m.in. dla depozytów ludności i przedsiębiorstw, depozytów eurodolarowych oraz certyfikatów depozytowych. Zwykła stopa procentowa **w skali rocznej** (w konwencji 360 dni) jest równa kwocie odsetek płaconych za t dni podzielonej przez kapitał i pomnożonej przez liczbę okresów w ciągu roku:

(1) $$r = \frac{\text{odsetki}}{\text{kapitał}}\left(\frac{360}{t}\right)$$

Po roku początkowy kapitał wraz z kapitalizowanymi odsetkami wynosi:

(2) $$\text{kapitał} + \text{odsetki} = \text{kapitał}\left(1 + \frac{rt}{360}\right)^{\frac{365}{t}} = \text{kapitał}\left(1 + \frac{r}{\frac{360}{t}}\right)^{\frac{365}{t}}$$

Efektywna stopa roczna (symbol i) równoważna zwykłej stopie r wynosi zatem:

(3) $$i = \left(1 + \frac{rt}{360}\right)^{\frac{365}{t}} - 1$$

Przykład 1. Zwykła stopa bankowa

Beata składa depozyt 100 PLN w banku. Stopa rynkowa wynosi 10%.
Odsetki są naliczane co miesiąc.
1. Ile wynosi stan konta po 12 miesięcach ? Konwencja a/365.
Ile wynosi równoważna stopa zrotu w skali rocznej dla każdego miesiąca?
2.Ile wynosi efektywna stopa zrotu w konwencji 30/360 ?
3. Ile wynosi ciągła stopa zwrotu ?

Rozwiązanie

Ad 1

Miesiąc	Liczba dni	Stan rachunku	Stpa efektywna
1	31	100,849315	10,470434%
2	28	101,622954	10,474925%
3	31	102,486053	10,470434%
4	30	103,328404	10,471930%
5	31	104,205988	10,470434%
6	30	105,062475	10,471930%
7	31	105,954787	10,470434%
8	31	106,854676	10,470434%
9	30	107,732934	10,471930%
10	31	108,647926	10,470434%
11	30	109,540923	10,471930%
12	31	110,471270	10,470434%

Efektywna stopa zwrotu wynosi 10,471270%

Ad. 2

Konwencja 30.360. Efektywna stopa wynosi (1+10%/12)^12= 10,471307%

Ad.3.

Równoważna stopa ciągła wynosi ln(1+10,47%) = 9,96%.

1.3.2 Stopa dla obligacji

Obligacja z odsetkami co roku

(4) $$P = \frac{cB}{(1+i)^1} + \frac{cB}{(1+i)^2} + ... + \frac{cB + B}{(1+i)^T}$$

Stopa rentowności jest stopą efektywną w skali roku.

Obligacja z odsetkami co pół roku

(5) $$P = \frac{\frac{c}{2}B}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^1} + \frac{\frac{c}{2}B}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^2} + ... + \frac{\frac{c}{2}B + B}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^T}$$

W przypadku obligacji z odsetkami wypłacanymi co pół roku według stopy y, równoważną **efektywną roczną stopę** zwrotu (ang. *bond equivalent yield*) można zapisać:

(6) $$i = \left(1 + \frac{y}{2}\right)^2 - 1$$

Obligacja z m kuponami w roku

(7) $$P = \frac{\frac{c}{m}B}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^1} + \frac{\frac{c}{m}B}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^2} + \ldots + \frac{\frac{c}{m}B}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{nm}} + \frac{B}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{nm}}$$

$$(1+i)^n = \left(1+\frac{y}{m}\right)^{mn}$$

Obligacja zerokuponowa z odsetkami co roku

(8) $$P = \frac{CF_T}{(1+i)^T} = \frac{B}{(1+i)^T}$$

Stopa rentowności jest stopą efektywną w skali roku.

Obligacja bezterminowa z odsetkami co roku

(9) $$P = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{CF_t}{(1+i)^t} = \frac{Bc}{i}$$

Stopa rentowności jest stopą efektywną w skali roku.

1.3.3 Stopa dyskonta

Jeśli odsetki są liczone z góry, mamy do czynienia ze **stopą dyskonta**, nazywaną także bankową stopą dyskonta. Stopa dyskonta jest stosowana np. przy sprzedaży bonów skarbowych.

Stopę dyskonta **w skali rocznej** otrzymujemy mnożąc stopę dyskonta za okres t dni (dyskonto podzielone przez wartość nominalną) przez liczbę okresów w roku:

(10) $$d = \frac{\text{dyskonto}}{\text{wartość nominalna}}\left(\frac{360}{t}\right)$$

Pomiędzy zwykłą stopą procentową a bankową stopą dyskonta występuje zależność:

(11) $$1 + \frac{rt}{360} = \frac{1}{1 - \frac{dt}{360}}$$

Na podstawie tej zależności można wyznaczyć:

(12) $$r = \frac{d}{1 - \frac{dt}{360}}$$ lub

(13) $$d = \frac{r}{1 + \frac{rt}{360}}$$

1.3.4 Kapitalizacja i aktualizacja ciągła

Jeśli odsetki są składane w sposób ciągły według stopy c, to przy nieskończenie krótkim okresie kapitalizacji, po roku kapitał z odsetkami wynosi:

(14) $$\text{kapitał} + \text{odsetki} = \text{kapitał}\ e^{c}$$

W przypadku **kapitalizacji ciągłej** dla n lat czynnik kapitalizujący wynosi:

(15) $$(1+i)^{n} = e^{cn}$$

Czynnik **aktualizacji ciągłej** wynosi:

(16) $$\frac{1}{(1+i)^{n}} = e^{-cn}$$

Efektywna stopa roczna (gdy znana jest stopa kapitalizacji ciągłej) jest zatem równa:

(17) $$i = e^{c} - 1$$

Załóżmy, że chcemy wyznaczyć zależność pomiędzy stopą kapitalizacji ciągłej (c), a zwykłą stopą zwrotu (r). Wówczas musi zachodzić równość:

(18) $$e^{c} = 1 + i = \left(1 + \frac{rt}{360}\right)^{\frac{365}{t}}$$

Na podstawie tego równania możemy wyznaczyć stopę kapitalizacji ciągłej (gdy znamy efektywną roczną stopę zwrotu i bądź zwykłą stopę zwrotu r):

(19) $$c = \ln(1+i) = \frac{365}{t}\ln\left(1 + \frac{rt}{360}\right)$$

Zwykłą stopę zwrotu (gdy znana jest stopa kapitalizacji ciągłej) możemy wyznaczyć na podstawie następującego wzoru:

(20) $$r = \frac{360}{t}\left(e^{\frac{ct}{365}} - 1\right)$$

Wartość jednego złotego kapitalizowanego w sposób ciągły przy stopach c_1, c_2, ... c_n w kolejnych podokresach jest równa liczbie e podniesionej do potęgi równej sumie tych stóp:

(21) $$e^{c_1+c_2+\ldots+c_n} = e^{c_1}e^{c_2}\ldots e^{c_n}$$

Stopa kapitalizowana w sposób ciągły dla okresu obejmującego podokresy (1,2,...n) wynosi:

(22) $$\ln(e^{c_1}e^{c_2}\ldots e^{c_n}) = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$$

Wyznaczenie efektywnych stóp rocznych umożliwia porównanie stóp procentowych dla różnych instrumentów finansowych. Tabela (1) jest zbiorczym podsumowaniem zależności pomiędzy różnymi stopami procentowymi.

Tabela 1. Stopy procentowe efektywne

	Efektywna stopa roczna	Stopa równoważna
Zwykła stopa, odsetki składane po t dniach	$i=\left(1+\frac{rt}{360}\right)^{\frac{365}{t}}-1$	$r=\frac{360}{t}\left[(1+i)^{\frac{t}{365}}-1\right]$
Stopa zwrotu dla obligacji z odsetkami wypłacanymi co pół roku	$i=\left(1+\frac{y}{2}\right)^{2}-1$	$y=2\left[(1+i)^{\frac{1}{2}}-1\right]$
Stopa dyskonta	$i=\left(\frac{1}{1-\frac{dt}{360}}\right)^{\frac{365}{t}}-1$	$d=\frac{360}{t}\left[1-\frac{1}{(1+i)^{\frac{t}{365}}}\right]$ lub $d=\frac{r}{1+\frac{rt}{360}}$
Stopa kapitalizacji ciągłej	$i=e^{c}-1$	$c=\ln(1+i)$

Źródło: opracowanie własne.

Przykład 2. Konwersje stóp procentowych

Zwykła stopa procentowa na rynku pieniężnym na okres 180 dni wynosi 20,0%. Dokonaj konwersji tej stopy na:
a. efektywną roczną stopę procentową,
b. bankową stopę dyskonta,
c. stopę zwrotu dla obligacji (odsetki półroczne),
d. stopę kapitalizacji ciągłej.

Rozwiązanie

Ad a.

Efektywna roczna stopa procentowa:

$$i = \left(1 + \frac{rt}{360}\right)^{\frac{365}{t}} - 1 \quad = \quad 21{,}32\% \qquad \text{Spr. } r = \frac{360}{t}\left[(1+i)^{\frac{t}{365}} - 1\right] \quad = \quad 20{,}00\%$$

Ad b.

Bankowa stopa dyskonta:

$$d = \frac{360}{t}\left[1 - \frac{1}{(1+i)^{\frac{t}{365}}}\right] \quad = \quad 18{,}18\% \qquad \text{Spr. } i = \left(\frac{1}{1 - \frac{dt}{360}}\right)^{\frac{365}{t}} - 1 \quad = \quad 21{,}32\%$$

lub

$$d = \frac{r}{1 + \frac{rt}{360}} \quad = \quad 18{,}18\% \qquad \text{Spr. } r = \frac{d}{1 - \frac{dt}{360}} \quad = \quad 20{,}00\%$$

Ad c.

Stopa dla obligacji

$$y = 2\left[\left(1+i)^{\frac{1}{2}} - 1\right)\right] \quad = \quad 20{,}29\% \qquad \text{Spr. } i = \left(1 + \frac{y}{2}\right)^2 - 1 \quad = \quad 21{,}32\%$$

Ad d.

Stopa kapitalizowana w sposób ciągły:

$$c = \ln(1+i) \quad = \quad 19{,}33\% \qquad \text{Spr. } i = e^c - 1 \quad = \quad 21{,}32\%$$

lub

$$c = \frac{365}{t}\ln\left(1 + \frac{rt}{360}\right) \quad = \quad 19{,}33\% \qquad \text{Spr. } r = \frac{360}{t}\left(e^{\frac{ct}{365}} - 1\right) \quad = \quad 20{,}00\%$$

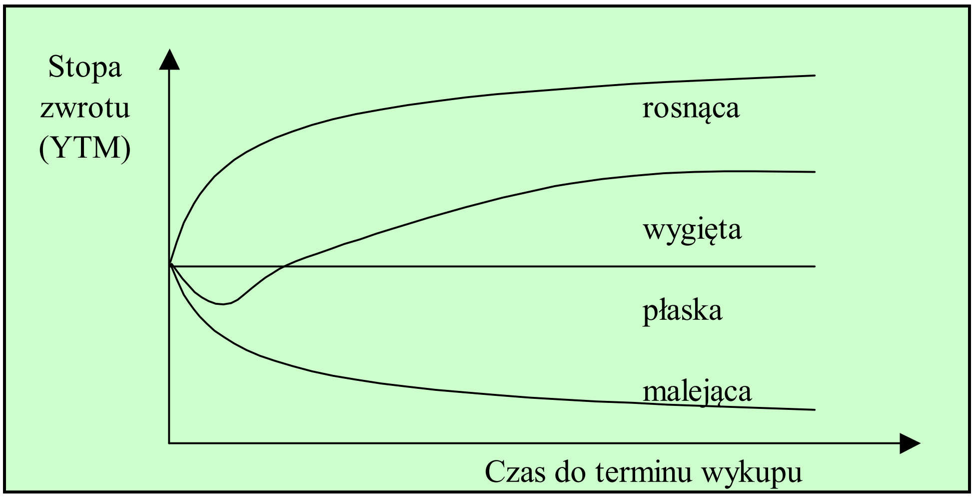
1.4 Struktura terminowa stóp procentowych

Struktura terminowa stóp procentowych (ang. *term structure of interest rates*) jest zależnością pomiędzy poziomem stopy procentowej a terminem zapadalności (np. terminem wykupu obligacji). Bada się także zależność poziomu stóp procentowych od średniego terminu zwrotu nakładów inwestycyjnych (duration).

Krzywa struktury terminowej stóp procentowych może przedstawiać:

- stopy dla różnych instrumentów finansowych (papiery rządowe, depozyty na rynku międzybankowym, papiery komercyjne itp.),
- aktualne stopy zwrotu (YTM, *yield to maturity*), stopy spot bądź stopy forward,
- stopy dla podmiotów o różnej kategorii zdolności kredytowej.

Typowe kształty **krzywej struktury terminowej stóp procentowych** (ang. *yield curve*) są przedstawione na rysunku (4). Najczęściej występuje krzywa rosnąca. Im dłuższy jest okres do wykupu obligacji, tym wyższa jest stopa zwrotu dla obligacji (długookresowe stopy są wyższe niż krótkookresowe). Rzadko występuje sytuacja, że poziom stopy procentowej jest stały i nie zależy od terminu. Mówimy wówczas o płaskiej strukturze (ang. *flat interest rate*). Jeszcze rzadziej krzywa stopy dochodu ma kształt odwrócony (stopy krótkookresowe są wyższe niż stopy długookresowe). Ta ostatnia sytuacja może mieć miejsce w warunkach spadku inflacji.



Rys. 4. Kształty krzywej stopy dochodu
Źródło: Opracowanie własne.

Kształt krzywej struktury terminowej stóp procentowych wyjaśniają m.in. następujące teorie:

1. oczekiwań (ang. *expectations theory*),
2. preferencji płynności (ang. *liquidity preference theory*),
3. segmentacji rynku (ang. *market segmentation theory*),
4. preferowanego środowiska (ang. *preferred habitat theory*).

Teoria oczekiwań jest najstarszą teorią zajmującą się strukturą terminową stóp procentowych. Teoria została zainspirowana przez Irwinga Fishera oraz rozwinięta przez Friedricha Lutza[1]. Zgodnie z hipotezą nieobciążonych oczekiwań (ang. *unbiased expectations hypothesis*) stopy procentowe forward (funkcje odpowiednich stóp spot) są nieobciążonymi

[1] I. Fisher, *Appreciation and Interest*, „Publications of the American Economic Association", 1896, vol. 11, no. 4, oraz F.A.Lutz, *The Structure of Interest Rates*, „Quarterly Journal of Economics", November 1940, vol. 55, s.36-63.

predyktorami przyszłych stóp procentowych spot. Hipoteza ta była w badaniach empirycznych potwierdzana[2] oraz odrzucana[3].

Zgodnie z tzw. hipotezą lokalnych oczekiwań (ang. *local expectations hypothesis*) obligacje różniące się wyłącznie terminem wykupu powinny mieć tę samą stopę forward w dowolnym przyszłym przedziale czasu bez względu na terminy wykupu[4]. Przykładowo, stopa dla okresu pomiędzy końcem pierwszego roku, a końcem drugiego roku, $_2f_1$, jest identyczna dla obligacji np. trzyletniej, pięcioletniej, bądź dziesięcioletniej.

Robert Engle i Victor Ng postawili wniosek, że oczekiwane (prognozowane) przyszłe stopy procentowe spot są równe stopom forward skorygowanym **o premie zależne od zmienności** stóp forward. Badania na podstawie modelu ARCH (ang. *autoregressive conditional heteroscedascity*) wykazały, że stopy forward skorygowane o premie zależne od zmienności stóp forward są bardziej trafnymi predyktorami przyszłych stóp procentowych spot[5].

Teoria preferencji płynności tłumaczy wyższe stopy instrumentów długoterminowych zachowaniem dłużników, którzy preferują instrumenty finansowe z dłuższymi terminami wykupu i są skłonni zapłacić wyższą stopę kosztu za ograniczenie ryzyka braku płynności. Teoria ta wyjaśnia w zasadzie typowy kształt rosnącej krzywej dochodowości.

Teoria segmentacji wyjaśnia różne możliwe kształty krzywej stóp zwrotu występowaniem odrębnych segmentów instrumentów finansowych (rynek instrumentów krótkoterminowych, rynek instrumentów długoterminowych), na których niezależnie kształtują się stopy procentowe[6].

Teoria preferowanego środowiska[7] dopuszcza możliwość zmiany przez inwestorów preferowanego segmentu rynku z określonymi terminami wykupu dla osiągnięcia korzyści w innym segmencie rynku z innymi terminami wykupu.

1.5 Czynniki wpływające na stopy procentowe

Polityka monetarna

---

[2] Np. David Meiselman, *The Term Structure of Interest Rates*. Englewood Cliffs, Prentice Hall, NJ, 1962.

[3] Np. R. Brooks, M.J.King, M. Livingston, *The Unbiased Expectation Hypothesis and Error Learning*, Advances in Quantitative Analysis of Finance and Accounting, 1993, vol. 2, część A s. 105-113.

[4] Teoretyczne uzasadnienie tej hipotezy przedstawiają J.C.Cox, J.E. Ingersoll, Jr., St. Ross, *A Re-Examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates*, „Journal of Finance" 1981, vol. 36, no. 4 s. 769-799.

[5] R. Engle, V. Ng, *Time-Varying Volatility and the Dynamic Behavior of the Term Structure*, „Journal of Money, Credit and Banking", 1993, vol. 6, no. 1, s.59-69.

[6] J.M.Culbertson, *The Term Structure of Interest Rates*, „Quarterly Journal of Economics", November 1957, vol. 71, no. 4 s.485-517.

[7] F.Modigliani, R.Sutch, *Innovations in Interest Rate Policy*, „American Economic Review", 1966, vol. 56, no. 2.

Termin

Ryzyko kredytowe

Kapitał transakcji